**Fysiikan valintakoe 6.5.2015 klo 9-12**

1. Kippiauton lavalla on kappale etäisyydellä 5,4 m lavan takareunasta. Kappaleen ja lavan välinen lepokitkakerroin $\mu_s = 0{,}42$, liikekitkakerroin $\mu_k = 0{,}31$ ja kappaleen massa $m = 79$ kg. Kipatessa lavan kaltevuus kasvaa vakiokulmanopeudella $\omega = 2{,}3°/\mathrm{s}$ lähtien vaakatasosta ja päättyen siihen kaltevuuteen, jolla kappale lähtee liikkeelle. Putoamiskiihtyvyys $g = 9{,}81$ m/s$^2$.

   a) Millä kaltevuudella kappale lähtee liikkeelle? [3p]

   b) Esitä graafisesti kappaleeseen vaikuttavan kitkavoiman suuruus ajan funktiona alkaen hetkestä, jolloin kippaaminen alkaa ja päättyen hetkeen, jolloin kappale osuu maahan. [3p]

   c) Mikä on kappaleen vauhti lavan takareunalla? [2p]

   d) Kuinka kaukana lavan reunasta vaakasuunnassa kappale osuu maahan, jos lavan reuna on korkeudella 1,5 m? [2p]

   Ratkaisu:

   a) Vapaakappalekuvasta (ei näkyvissä) saadaan yhtälöt

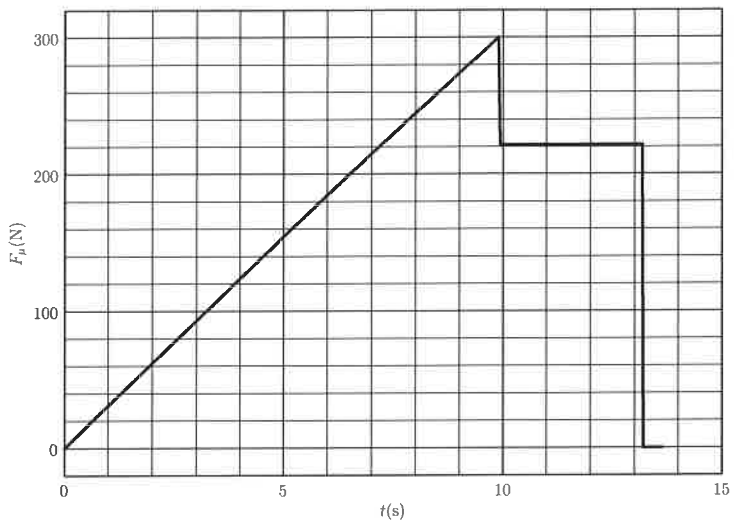
   $$\begin{aligned} mg\sin\alpha - F_s &= 0 \\ N - mg\cos\alpha &= 0, \end{aligned}$$

   missä $\alpha$ on lavan kaltevuus ja $N$ on normaalivoima. Kappale lähtee liikkeelle, kun lepokitka $F_s = mg\sin\alpha$ saavuttaa maksimiarvonsa $\mu_s N$. Tämän ja em. yhtälöiden nojalla saadaan ehto

   $$\tan\alpha = \mu_s = 0{,}42 \Rightarrow \alpha = 22{,}8°.$$

   Kappale lähtee liikkeelle kaltevuudella 23°.

   b) Kippaamisen ajan kitka on lepokitkaa $F_s = mg\sin\omega t$. Kippaaminen kestää ajan $\Delta t_1 = \alpha/\omega = 9{,}9$ s. Kun kappale lähtee liikkeelle, kitka muuttuu liikekitkaksi $F_k = \mu_k mg\cos\alpha$. Liuku kestää ajan $\Delta t_2 = \sqrt{2s/a} = 3{,}3$ s, missä $s = 5{,}4$ m ja $a = 0{,}995$ m/s$^2$ ($a$ laskettu c-kohdassa). Putoamisaika on $\Delta t_3 = 0{,}44$ s (laskettu d-kohdassa).




c) Lepokitka muuttuu liikekitkaksi ja kappaleella on kiihtyvyyttä

$$\left.\begin{array}{l} mg\sin\alpha - \mu_k N = ma \\ N - mg\cos\alpha = 0, \end{array}\right\} \Rightarrow a = (\sin\alpha - \mu_k\cos\alpha)g = 0{,}995\ \mathrm{m/s^2}.$$

Vakiokiihtyvyys $a$ antaa matkalla $s = 5{,}4$ m vauhdin

$$v = \sqrt{2as} = \sqrt{2\cdot 0{,}995\cdot 5{,}4}\ \mathrm{m/s} = 3{,}28\ \mathrm{m/s}.$$

Kappaleen vauhti lavan takareunalla on 3,3 m/s.

d) Kyseessä on heittoliike, joka noudattaa yhtälöitä

$$\begin{aligned} x &= x_0 + v_{0x}t \\ y &= y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2, \end{aligned}$$

missä $v_{0x} = v_0\cos\alpha_0$ ja $v_{0y} = v_0\sin\alpha_0$. Alkuvauhti $v_0 = 3{,}28$ m/s ja lähtökulma $\alpha_0 = -22{,}8°$. Kun sijoitetaan $y_0 = 1{,}5$ m ja $y = 0$, saadaan alemmasta yhtälöstä lentoaika (positiivinen ratkaisu)

$$t = \frac{v_{0y} + \sqrt{v_{0y}^2 + 2gy_0}}{g} = 0{,}439\ \mathrm{s}.$$

Kun tämä sijoitetaan ylempään yhtälöön, saadaan putoamisetäisyys $x - x_0 = 1{,}3$ m.

2. Kevyen pystysuorassa riippuvan jousen päähän kiinnitetään kappale, jonka massa on 553 g. Kappale päästetään värähtelemään jousen varassa ja sen korkeutta mitataan ajan funktiona. Havainnot on esitetty oheisessa taulukossa.

| t/s | 0,0 | 0,2 | 0,4 | 0,6 | 0,8 | 1,0 | 1,2 | 1,4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y/cm | 0,0 | −36 | −42 | −14 | 26 | 44 | 26 | −14 |

a) Piirrä havainnoista graafinen kuvaaja. [3p]

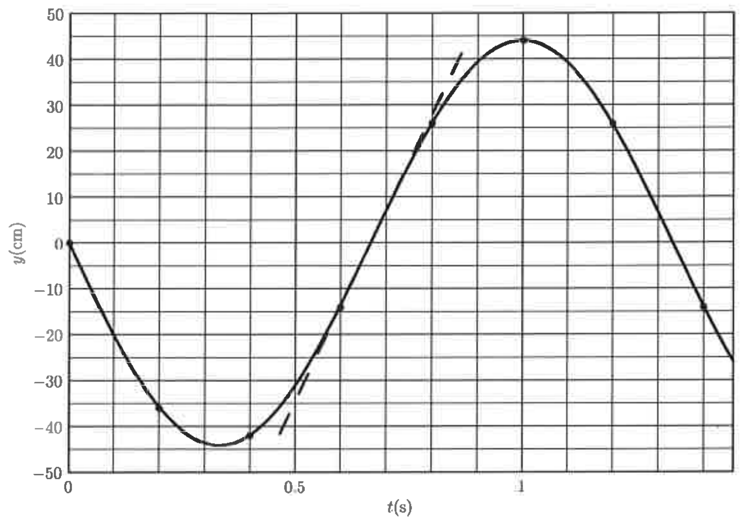
b) Määritä graafisen esityksen perusteella kappaleen värähdysaika. [2p]

c) Määritä jousen jousivakio. [3p]

d) Määritä kappaleen maksiminopeus graafisen esityksen perusteella (käyrän kulmakertoimesta) ja vertaa sitä harmonisen värähtelijän teoreettiseen maksiminopeuteen $A\sqrt{k/m}$. [2p]

Ratkaisu:

a) Jousen päähän ripustettu kappale on harmoninen värähtelijä - havaintojen kuvaaja on sinikäyrä




b) Huomataan, että "sattumalta" 5. ja 7. havaito ovat samalla korkeudella - 6. havainto niiden puolivälissä on ääripiste, joka saavutetaan hetkellä $3T/4$, missä $T$ on värähdysaika.

$$\frac{3}{4}T = 1{,}0 \text{ s} \Leftrightarrow T = \frac{4}{3} \text{ s} = 1{,}33 \text{ s}.$$

Värähdysaika on 1,3 s.

c) Harmonisen värähtelijän värähdysaika voidaan lausua jousivakion $k$ ja massan $m$ avulla muodossa

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \Leftrightarrow k = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = 12{,}3 \text{ N/m}.$$

Jousivakio on 12 N/m.

d) Vauhti on suurimmillaan, kun kappale ohittaa tasapainoaseman ($y = 0$). Käyrän tangentin kulmakerroin kohdassa $T/2$ on

$$v_{\text{max}} = \frac{40 \text{ cm} - (-40 \text{ cm})}{0.86 \text{ s} - 0.47 \text{ s}} = 205 \text{ cm/s}.$$

Havainnosta 6, joka on ääripiste, saadaan amplitudi $A = 44$ cm. Teoreettinen maksiminopeus

$$v_{\text{max}} = A\sqrt{\frac{k}{m}} = (44 \text{ cm}) \cdot \sqrt{\frac{12.3 \text{ N/m}}{0{,}553 \text{ kg}}} = 208 \text{ cm/s}.$$

Kahden merkitsevän numeron tarkkuudella molemmat menetelmät antavat maksiminopeudeksi 2,1 m/s.

3. Täydellisesti lämpöeristetyssä astiassa on alkutilanteessa 6,33 litraa vettä lämpötilassa 20,0 °C ja vedessä kelluu 642-grammainen jääkuutio lämpötilassa −18,0 °C. Veden tiheys ja ominaislämpökapasiteetti ovat 999 kg/m$^3$ ja 4,19 kJ/(kg °C). Jäälle vastaavat suureet ovat 917 kg/m$^3$ ja 2,09 kJ/(kg °C). Veden ominaissulamislämpö on 333 kJ/kg. Oletetaan, että annetut suureet eivät riipu lämpötilasta.

   a) Kuinka paljon jääkuution yläpinta on alkutilanteessa veden pinnan yläpuolella, jos se kelluu siten, että yläpinta on vaakatasossa? [4p]

   b) Mikä on veden lämpötila, kun jää on sulanut ja lämpötila tasaantunut astiassa? [4p]

   c) Mitä tapahtuu vedenpinnan korkeudelle jään sulaessa? [2p]

Ratkaisu: Merkitään $t_\mathrm{v} = 20{,}0\,^\circ\mathrm{C}$, $t_\mathrm{j} = -18{,}0\,^\circ\mathrm{C}$, $t_0 = 0\,^\circ\mathrm{C}$, $\rho_\mathrm{v} = 999$ kg/m$^3$, $\rho_\mathrm{j} = 917$ kg/m$^3$, $c_\mathrm{v} = 4190$ J/(kg °C), $c_\mathrm{j} = 2090$ J/(kg °C), $L_\mathrm{s} = 333 \cdot 10^3$ J/kg, $V_\mathrm{v} = 6{,}33 \cdot 10^{-3}$ m$^3$ ja $m_\mathrm{j} = 0{,}642$ kg.

   a) Jääkuution tilavuus $V_\mathrm{j} = m_\mathrm{j}/\rho_\mathrm{j} = 0{,}700 \cdot 10^{-3}$ m$^3$ ja särmän pituus $s = \sqrt[3]{V_\mathrm{j}} = 88{,}8$ mm. Jääkuution syrjäyttämän veden tilavuus on $s^2(s-h)$, missä $h$ on a-kohdassa kysytty suure. Archimedeen lain mukaan jääkuution massa on yhtä suuri kuin sen syrjäyttämän veden massa

$$\rho_\mathrm{j} s^3 = \rho_\mathrm{v} s^2 (s-h) \Leftrightarrow h = s\left(1 - \frac{\rho_\mathrm{j}}{\rho_\mathrm{v}}\right) = 7{,}29 \text{ mm}.$$

   b) Jos jää sulaa kokonaan ja loppulämpötilaksi tulee $t$, astian sisällä tapahtuvat seuraavat prosessit

      1. jää lämpenee: $Q_1 = m_\mathrm{j} c_\mathrm{j} (t_0 - t_\mathrm{j})$
      2. jää sulaa: $Q_2 = m_\mathrm{j} L_\mathrm{s}$
      3. jäävesi lämpenee: $Q_3 = m_\mathrm{j} c_\mathrm{v} (t - t_0)$
      4. vesi jäähtyy: $Q_4 = m_\mathrm{v} c_\mathrm{v} (t - t_\mathrm{v})$

   Täydellisesti lämpöeristetyssä astiassa lämpömäärien summa on nolla, koska lämpöä siirtyy vain systeemin sisällä

$$\sum Q_i = 0 \Leftrightarrow t = \frac{m_\mathrm{v} c_\mathrm{v} t_\mathrm{v} + m_\mathrm{j} c_\mathrm{j} t_\mathrm{j} - m_\mathrm{j} L_\mathrm{s}}{(m_\mathrm{j} + m_\mathrm{v}) c_\mathrm{v}} = 10{,}0\,^\circ\mathrm{C}.$$

   c) Jään massa on yhtä suuri kuin sen syrjäyttämän veden massa. Kun jää sulaa vedeksi, sen tiheys tulee yhtä suureksi kuin sen syrjäyttämän veden tiheys. Näin ollen sulanut jää täyttää tilavuuden, jonka se syrjäytti vedestä ja veden pinta pysyy ennallaan.

4. Olet saanut tehtäväksesi suunnitella sähköpatterin, joka toteutetaan kahden vastuksen $R_1 = R$ ja $R_2 = 2R$ avulla. Tarkoitus on saada aikaan mahdollisimman monta tehoaluetta erilaisilla kytkennöillä. Vastukset voivat olla käytössä yhdessä tai erikseen. Jännitelähteenä on verkkojännite 230 V.

   a) Piirrä mahdolliset vastusten kytkennät ja laske niitä vastaavat tehot, kun $R = 529\ \Omega$. [4p]

b) Millä resistanssin $R$ arvolla maksimiteho on 1,20 kW? [2p]

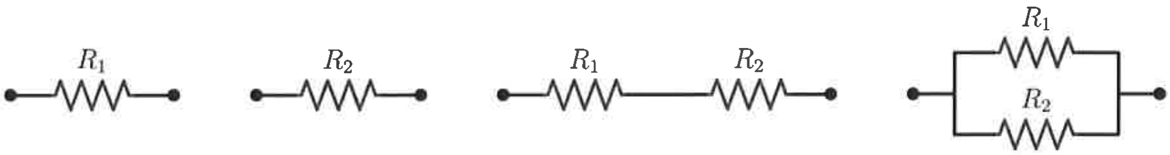
c) Kuinka suuri sulake tarvitaan virtapiiriin, jossa käytetään kahta b-kohdan patteria, jos sulakkeiden nimellisvirrat ovat 6, 10, 16 ja 20 A? [2p]

d) Piirrä virtapiiri, jolla saadaan aikaan tehot 400 W, 800 W ja 1,20 kW käyttäen 230 V:n vaihtojännitelähdettä, kahta kytkintä ja vastuksia $R_1$ ja $R_2$. [2p]

a) Teho saadaan jännitteen ja resistanssin avulla yhtälöstä

$$P = \frac{U^2}{R}.$$

Mahdolliset kytkennät ovat




ja niitä vastaavat tehot vasemmalta oikealle 100 W, 50,0 W, 33,3 W ja 150 W.

b) Maksimiteho saadaan rinnankytkennällä, jossa

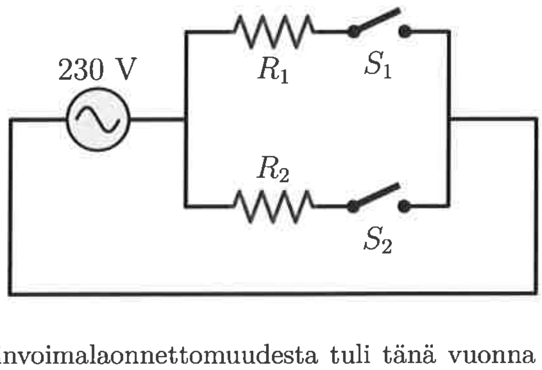
$$P = U^2\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = \frac{3}{2}\frac{U^2}{R} \Leftrightarrow R = \frac{3}{2}\frac{U^2}{P} = 66{,}1\ \Omega.$$

c) Teho saadaan jännitteen ja virran avulla yhtälöstä

$$P = UI \Leftrightarrow I = \frac{P}{U} \Rightarrow I_{\max} = \frac{2 \cdot 1200\ \mathrm{W}}{230\ \mathrm{V}} = 10{,}4\ \mathrm{A}$$

Tarvitaan 16 A sulake.

d) Oheisella kytkennällä voidaan kumpikin vastus kytkeä erikseen tai molemmat yhtäaikaa, jolloin saadaan vaaditut tehot.




5. Tšernobylin ydinvoimalaonnettomuudesta tuli tänä vuonna kuluneeksi 29 v. Onnettomuudessa pääsi ilmakehään ja levisi eri puolille Eurooppaa mm. 13 kg $^{137}$Cs-isotooppia ja 650 g $^{134}$Cs-isotooppia, joiden puoliintumisajat ovat 30,2 a ja 2,06 a. Molemmat isotoopit ovat $\beta$-säteilijöitä ja niiden hajoamisenergiat ovat 1,176 MeV ja 2,062 MeV. Alkeisvaraus $e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ eV. (laadun piti olla C)

a) Mitkä olivat mainittujen päästöjen aktiivisuudet päästöhetkellä yksiköissä Bq? [3p]

b) Mitkä ovat aktiivisuudet 30 vuoden kuluttua onnettomuudesta? [3p]

c) Oletetaan, että päästöjen säteilyenergiat absorboituvat tasaisesti sataan miljoonaan 75-kiloiseen ihmiseen. Mitkä olivat päästöjen osuudet annosnopeudesta päästöhetkellä? [2p]

d) Kuinka pitkän ajan kuluttua päästöhetkestä osuudet annosnopeudesta ovat yhtä suuret ja kuinka suuri annosnopeus silloin on? [2p]

Ratkaisu:

a) Aktiivisuus $A = \lambda N$, missä $\lambda$ on hajoamisvakio ja $N$ ydinten lukumäärä. Hajoamisvakio $\lambda = \ln 2/T_{1/2}$, missä $T_{1/2}$ on puoliintumisaika (a = vuosi). $\lambda_{137} = \ln 2/(30{,}2\text{ a} \cdot 31{,}536 \cdot 10^6\text{ s/a}) = 7{,}28 \cdot 10^{-10}$ 1/s ja vastaavasti $\lambda_{134} = 1{,}07 \cdot 10^{-8}$ 1/s. Ydinten lukumäärä $N = (m/M)N_\mathrm{A}$, missä $N_\mathrm{A}$ on Avogadron luku ja $M$ moolimassa. Isotoopin moolimassa (g/mol) on likimain massaluvun suuruinen. Avogadron luku $N_\mathrm{A} = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ 1/mol oli unohtunut tehtävänannosta, mutta eipä sitä kukaan kysynyt. $N_{137} = (13000\text{ g}/137\text{ g/mol}) \cdot N_\mathrm{A} = 5{,}71 \cdot 10^{25}$ ja vastaavasti $N_{134} = 2{,}92 \cdot 10^{24}$. Aktiivisuudet ovat $A_{137} = 4{,}16 \cdot 10^{16}$ Bq ja $A_{134} = 3{,}12 \cdot 10^{16}$ Bq.

b) Aktiivisuus vähenee eksponentiaalisesti ajan funktiona

$$A(t) = A(0)e^{-\lambda t}.$$

Alkuhetken aktiivisuudet $A(0)$ laskettiin a-kohdassa. Näin saadaa $A_{137}(30\text{ a}) = 2{,}09 \cdot 10^{16}$ Bq ja $A_{134}(30\text{ a}) = 1{,}25 \cdot 10^{12}$ Bq

c) Annosnopeus kertoo kuinka suuri ekvivalentti annos tulee aikayksikössä. Ekvivalentti annos $H = QD$, missä $Q$ on laatukerroin (Sv/J) ja $D = AEt$ on absorboitunut annos, missä $E$ on yhden hajoamisen kudokseen jättämä energia (tässä hajoamisenergia) ja $t$ on säteilyaika. Kun $\beta$-säteilyn laatukerroin on 1 ja 1 MeV = $10^6 \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ J, ovat annosnopeudet $H_{137} = 3{,}76$ mSv/h ja $H_{134} = 4{,}94$ mSv/h

d) Ekvivalentti annos $H = QAEt$, missä $Q$ ja $t$ ovat samat molemmille päästöille. Tästä saadaan yhtäsuuruudelle ehto

$$E_{137}A_{137}(0)e^{-\lambda_{137}t} = E_{134}A_{134}(0)e^{-\lambda_{134}t} \Leftrightarrow t = \frac{1}{\lambda_{137} - \lambda_{134}} \ln\left(\frac{A_{137}(0)E_{137}}{A_{134}(0)E_{134}}\right),$$

josta saadaan $t = 27{,}5 \cdot 10^6$ s = 318 vrk. Tällä hetkellä molempien päästöjen annosnopeudet ovat 3.69 mSv/h.

6. Mikä seuraavista väittämistä on oikein, mikä väärin? Vastauksia ei tarvitse perustella. Oikeasta vastauksesta +1p, vastaamattomasta 0p ja kahdesta väärästä vastauksesta −1p. Kokonaispistemäärä ei mene alle nollan.

   a) Kilpa-autoissa on leveät renkaat sen vuoksi, että suurempi kosketuspinta antaa suuremman kitkan.

   b) Heität sisätiloissa superpallon suoraan alaspäin, niin että se kimpoaa lattiasta kattoon ja takaisin lattiaan. Jos törmäykset ovat kimmoisia, molemmat törmäykset lattiaan tapahtuvat yhtä suurella nopeudella.

c) Moukari lähtee heittäjästä katsoen vaijerin osoittamaan suuntaan, koska heittäjää kohti ollut keskihakuisvoima häviää heittäjän irroittaessa otteensa.

d) Gay-Lussakin laki, Charlesin laki ja Boylen laki ovat kaasujen yleisen tilanyhtälön erikoistapauksia.

e) Avoimen huulitorven sulkeminen puolittaa perussävelen taajuuden.

f) Jääkaappi lämmittää ympäristöään vähintään sen sähkönkulutusta vastaavalla teholla.

g) Poikittaisesti homogeeniseen sähkökenttään tulevan varatun hiukkasen lentorata on ympyrä.

h) Poikittaisesti homogeeniseen magneettikenttään tulevan varatun hiukkasen lentorata on paraabeli.

i) Käämi vastustaa virran kulkua vaihtovirtapiirissä enemmän kuin tasavirtapiirissä.

j) Valonsäteen tullessa ilmasta veteen se kokonaisheijastuu tiettyä rajakulmaa suuremmilla tulokulmilla.

Ratkaisu:

a) Väärin: kosketuspinnan suuruus ei vaikuta oleellisesti kitkavoimaan, mutta se hidastaa renkaiden kulumista.

b) Oikein: jos törmäykset ovat kimmoisia (ilmanvastus olematon), poukkoilu toistaa itseään, niin että kaikki törmäykset lattiaan tapahtuvat samalla nopeudella.

c) Väärin: Newtonin I lain mukaan moukari lähtee siihen suuntaan, johon se eteni irroitushetkellä

d) Oikein: kaikki saadaan tilanyhtälöstä $pV = nRT$, kun yksi muuttujista $p, V$ ja $T$ on vakio.

e) Oikein: avoimella huulitorvella perussävel $f_1 = v/2L$ ja suljetulla $f_1 = v/4L$

f) Oikein: jääkaappi siirtää ympäristöön lämpömäärän $|Q_H| = |Q_C| + |W| \geq |W|$, missä $|W|$ vastaa sähkönkulutusta ja $|Q_C|$ on kaapin sisältä otettu lämpömäärä.

g) Väärin: magneettikentässä lentorata on ympyrä.

h) Väärin: sähkökentässä lentorata on paraabeli.

i) Oikein: käämiin indusoituu jännite $e = -L(\Delta i/\Delta t)$, joka vastustaa virran muutosta.

j) Väärin: valonsäteen tullessa vedestä ilmaan se kokonaisheijastuu tiettyä rajakulmaa suuremmilla tulokulmilla.