Turun yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen valintakoe 4.5.2015 klo 9:00–12:00

Tässä valintakokeessa ei saa käyttää laskinta eikä taulukkokirjaa.

Tehtävä 1. Perustele jokaisessa kohdassa vastauksesi.

(a) Anna esimerkki toisen asteen yhtälöstä, jolla on täsmälleen yksi juuri (ratkaisu).
(b) Anna esimerkki kolmannen asteen yhtälöstä, jolla on kolme reaalista juurta (ratkaisua).
(c) Anna esimerkki aidosti vähenevästä funktiosta, joka on määritelty kaikilla reaaliluvuilla.
(d) Anna esimerkki derivoituvasta funktioista, jonka derivaatan arvo pisteessä 0 on 2 ja derivaatan arvo pisteessä 1 on 3.
(e) Anna esimerkki funktiosta, joka saavuttaa suurimman arvonsa 2 pisteessä 1.
(f) Anna esimerkki funktiosta f, jolle $\int_{-1}^{2} f(x)\,dx = 1$.

Tehtävä 2. Etsi seuraavien yhtälöiden ja epäyhtälöiden kaikki reaaliset ratkaisut.

(a) $2^3 + 2^{x+1} \geq 9$
(b) $\sin(2x) = \frac{1}{2}$, kun tiedetään, että $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$
(c) $\ln(x-2) + \ln(x) = 0$
(d) $\frac{2x-3}{x+2} > 1$

Tehtävä 3. Tehdas valmistaa sylinterin (ympyräpohjainen lieriö) muotoisia säilyketölkkejä, joiden tilavuus on 5 dl. Materiaalikustannusten minimoimiseksi tölkin mittasuhteet valitaan siten, että tölkin pinta-ala (kansi ja pohja mukaanluettuina) on mahdollisimman pieni. Mikä tällöin on tölkin korkeuden h suhde pohjan säteeseen r?

Tehtävä 4. Laske

$$\int_{-1}^{2} |x^2 - x|\,dx.$$

Tehtävä 5. Pelaaja A osuu tauluun 90%, pelaaja B 75% ja pelaaja C 50% todennäköisyydellä. Osumasta tauluun saa yhden pisteen ja joukkue tarvitsee vielä kaksi pistettä. Pelaajalla A on jäljellä 2, pelaajalla B 3 ja pelaajalla C 4 ammusta. Pelaaja saa käyttää kaikki ammuksensa mutta ei luovuttaa niitä muille. Joukkue saa valita yhden pelaajan. Kannattaako joukkueen lähettää pelaaja A, B vai C yrittämään?

Turun yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen valintakoe 4.5.2015 klo 9:00–12:00

Tehtävä 1. Perustele jokaisessa kohdassa vastauksesi.

(a) Anna esimerkki toisen asteen yhtälöstä, jolla on täsmälleen yksi ratkaisu.
(b) Anna esimerkki kolmannen asteen yhtälöstä, jolla on kolme (reaalista) ratkaisua.
(c) Anna esimerkki aidosti vähenevästä funktiosta, jonka määrittelyjoukko on $\mathbb{R}$.
(d) Anna esimerkki derivoituvasta funktioista, jonka derivaatan arvo pisteessä 0 on 2 ja derivaatan arvo pisteessä 1 on 3.
(e) Anna esimerkki funktiosta, joka saavuttaa suurimman arvonsa 2 pisteessä 1.
(f) Anna esimerkki funktiosta f, jolle $\displaystyle\int_{-1}^{2} f(x)\,dx = 1$.

Mallivastaukset:
(a) Esimerkiksi $(x-1)^2 = 0$, jonka ianoa juuri on $x = 1$.
(b) Esimerkiksi $(x-1)(x-2)(x-3) = 0$, jonka juuret ovat $1, 2$ ja 3.
(c) Esimerkiksi $f(x) = -x$, joka on vähenevä koska $f'(x) = -1 < 0$.
(d) Esimerkiksi $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x$. Tämän derivaatta on $f'(x) = x+2$, jolle $f'(0) = 2$ ja $f'(1) = 1 + 2 = 3$.
(e) Olkoon $f(x) = -x(x-2) + 1 = -x^2 + 2x + 1$. Tällöin $f'(x) = -2x + 2$, joten $f'(x) > 0$ kun $x < 1$ ja $f'(x) < 0$ kun $x > 1$. Funktion suurin arvo on siis pisteessä $x = 1$ ja se on $f(1) = -1 + 2 + 1 = 2$.
(f) Olkoon f vakiofunktio $\frac{1}{3}$. Tällöin

$$\int_{-1}^{2} f(x)\,dx = \frac{1}{3}\int_{-1}^{2} dx = \frac{1}{3} \cdot 3 = 1.$$

Tehtävä 2. Etsi seuraavien yhtälöiden ja epäyhtälöiden kaikki reaaliset ratkaisut.

(a) $2^3 + 2^{x+1} \geq 9$
(b) $\sin(2x) = \dfrac{1}{2}$, kun tiedetään, että $\sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$
(c) $\ln(x-2) + \ln(x) = 0$
(d) $\dfrac{2x-3}{x+2} > 1$

Mallivastaukset:
(a) Laskemalla $2^3 = 8$ ja siirtämällä tämä termi oikealle pouolella, epäyhtälö muuttuu muotoon $2^{x+1} \geq 1$ (+1p). Koska $x \mapsto 2^x$ on kasvava ja $2^0 = 1$, niin saamme $x + 1 \geq 0$ (+1p), josta $x \geq -1$ (+1p).

(b) Koska $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, on mille hyvänsä $n \in \mathbb{Z}$ $\sin(\frac{\pi}{6} + 2\pi n) = \frac{1}{2}$. (+1p) Lisäksi supplementtikulmalle $\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$ ja sen kokonaislukumonikerroille pätee $\sin(\frac{5\pi}{6} + 2\pi n) = \frac{1}{2}$. (+1p) Yhtälön kaikki ratkaisut ovat siis

$$2x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + \pi n, \quad \text{missä } n \in \mathbb{Z}$$

ja

$$2x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{12} + \pi n, \quad \text{missä } n \in \mathbb{Z}.$$

(+1p)

(c)Määrittelyehto on $x - 2 > 0$ eli $x > 2$ (jolloin myös $x > 0$). Yhtälö voidaan kirjoittaa yhtäpitävään muotoon $\ln(x-2)(x) = \ln 1 \Leftrightarrow (x-2)(x) = 1$ (+1p). Tämä saadaan muotoon $x^2 - 2x - 1 = 0$, jonka ratkaisut ovat $x = 1 \pm \sqrt{2}$. (+1p) Koska $1 - \sqrt{2} < 0$ niin se ei kelpaa. Näin ollen $1 + \sqrt{2}$ on ainoa ratkaisu (+1p).

(d) Jos $x > -2$, saadaan epäyhtälö muotoon $2x - 3 > x + 2 \Leftrightarrow x > 5$ (+1p). Jos taas $x < -2$, saadaan kertolaskulla $2x - 3 < x + 2 \Leftrightarrow x < 5$. (+1p) Yhdistämällä ratkaisut saadaan ratkaisujoukoksi $x < -2$ tai $x > 5$. (+1p)

Tehtävä 3. Tehdas valmistaa sylinterin muotoisia säilyketölkkejä, joiden tilavuus on 5 dl. Materiaalikustannusten minimoimiseksi tölkin mittasuhteet valitaan siten, että tölkin pinta-ala kansi ja pohja mukaanluettuina on mahdollisimman pieni. Mikä tällöin on tölkin korkeuden h suhde pohjan säteeseen r?

Mallivastaus: Tölkin pinta-ala saadaan vaipan ja päätyjen alojen summana: $A = 2\pi rh + 2 \cdot \pi r^2$, (+1p) ja tilavuus puolestaan on pohjan ala kertaa korkeus: $5 = \pi r^2 h$. (+1p) Tästä on mahdollista ratkaista $h = \frac{5}{\pi r^2}$, jolloin

$$A = A(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{5}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{10}{r} = 2\pi r^2 + 10r^{-1} \quad (+2\text{p})$$

Etsitään A:n ääriarvot selvittämällä derivaatan nollakohdat:

$$\frac{dA}{dr} = 4\pi r - \frac{10}{r^2}, \quad (+3\text{p})$$

jonka nollakohdassa on $r^3 = \frac{10}{4\pi}$. (+2p) Lausekkeesta $A(r) = 2\pi r^2 + \frac{10}{r}$ nähdään, että $\lim_{r\to 0+} A(r) = \lim_{r\to\infty} A(r) = \infty$, ja koska derivaatalla on vain yksi nollakohta positiivisella reaaliakselilla, on tämän oltava minimikohta. (+2p)

Näin ollen kysytty suhde on

$$\frac{h}{r} = \frac{5}{\pi r^2} : r = \frac{5}{\pi r^3} = \frac{5}{\pi \frac{10}{4\pi}} = 2. \quad (+1\text{p})$$

Tehtävä 4. Laske

$$\int_{-1}^{3} |x^2 - x| \, dx.$$

Mallivastaus: Itseisarvomerkkien poistamiseksi on selvitettävä lausekkeen $x^2 - x$ merkit. Tämän nollakohdat ovat 0 ja 1 (+2p), ja tällöin

$$\int_{-1}^{3} |x^2 - x| \, dx = \int_{-1}^{0} x^2 - x \, dx + \int_{0}^{1} -(x^2 - x) \, dx + \int_{1}^{3} x^2 - x \, dx.$$

(+2p) Tällöin

$$\int_{-1}^{0} x^2 - x \, dx = \Big/_{\!-1}^{\,0} \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right) = 0 - \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{6}$$

$$\int_0^1 -(x^2-x)\,dx = \Big/_{0}^{1} -(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2) = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

ja

$$\int_1^3 x^2 - x\,dx = \Big/_{1}^{2} (\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2) = \frac{27}{3} - \frac{9}{2} - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) = \frac{14}{3}$$

(+2p kukin). Integraalin arvo on siis $\frac{5}{6} + \frac{1}{6} + \frac{14}{3} = \frac{17}{3}$ (+2p).

Tehtävä 5. A osuu tauluun 90%, B 75% ja C 50% todennäköisyydellä. Osumasta tauluun saa yhden pisteen ja joukkue tarvitsee vielä kaksi pistettä. A:lla on jäljellä 2, B:llä 3 ja C:llä 4 ammusta. Ampuja saa käyttää kaikki ammuksensa mutta ei luovuttaa niitä muille. Kannattaako joukkueen lähettää A, B vai C yrittämään?

Mallivastaus: A saa kaksi osumaa todennäköisyydellä

$$\left(\frac{9}{10}\right)^2 = \frac{81}{100},$$

(+3p) B saa kolme tai kaksi osumaa todennäköisyydellä

$$\left(\frac{3}{4}\right)^3 + 3\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2\cdot\frac{1}{4} = \frac{27}{64} + \frac{27}{64} = \frac{54}{64}$$

(+3p) ja C neljä, kolme tai kaksi osumaa todennäköisyydellä

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4 + 4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\frac{1}{2} + 6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{16} + \frac{4}{16} + \frac{6}{16} = \frac{11}{16}$$

(+3p) Koska $\frac{11}{16} = \frac{4\cdot 11}{4\cdot 16} = \frac{44}{64}$, niin B:n todennäköisyys on suurempi kuin C:n. Toisaalta $\frac{81}{100} = \frac{64\cdot 81}{6400} = \frac{5184}{6400}$, joten B:n todennäköisyys on suurempi kuin A:n. Täten paras onnistumismahdollisuus on B:llä. (+3)