Turun yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen valintakoe 15.5.2018.

Tässä valintakokeessa ei saa käyttää laskinta eikä taulukkokirjaa.

Tehtävä 1.
(a) Anna esimerkki derivoituvasta funktiosta f, jolle pätee $f'(x) > 0$ kun $x < 1$ ja $f'(x) \leq 0$ kun $x \geq 1$. Perustele vastauksesi.
(b) Anna esimerkki vähenevästä funktiosta, jolla ei ole yhtään nollakohtaa. Perustele vastauksesi.
(c) Anna esimerkki polynomifunktiosta $f(x)$, jolle $f(x) \geq 1$ jos ja vain jos $x \in [0,1] \cup [3,4]$. Perustele vastauksesi.

Pisteytys. Kaikki kohdat: annettu oikea esimerkki 2p, perusteltu että esimerkki on oikein 2p.
(a) Esimerkiksi $f(x) = -(x-1)^2 = -x^2 + 2x - 1$. Tällöin $f'(x) = -2x + 2$ ja $f'(x) > 0$ jos ja vain jos $x < 1$.
(b) Esimerkiksi $f(x) = e^{-x}$. Tällöin $f'(x) = -e^{-x} < 0$ eli funktio on vähenevä. Funktiolla ei ole yhtään nollakohtaa koska $e^t > 0$ kaikilla reallisilla t.
(c) Esimerkiksi $f(x) = -x(x-1)(x-3)(x-4) + 1$. Perustelu esimerkiksi sopivalla kuvalla.

Tehtävä 2. Määritä funktion $f(x) = \sin(x) + \sqrt{3}\cos(x)$ suurin ja pienin arvo välillä $0 \leq x \leq 2\pi$.

Pisteytys. Derivoimalla saamme $f'(x) = \cos x - \sqrt{3}\sin x$. [2p]
Tällöin $f'(x) = 0$ jos ja vain jos $\cos x = \sqrt{3}\sin x$. [2p]
Joten $\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ TAI $\sin^2 x = 3\cos^2 x$. [2p]
Saamme $x = \frac{\pi}{6} + \pi n$, joista välille kuuluvat $\frac{\pi}{6}$ ja $\frac{7\pi}{6}$. [2p]
Laskemalla $f(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2} + \sqrt{3}\frac{\sqrt{3}}{2} = 2$ ja $f(\frac{7\pi}{6}) = -\frac{1}{2} - \sqrt{3}\frac{\sqrt{3}}{2} = -2$ [2p]
Toisaalta $f(0) = \sqrt{3}$ ja $f(2\pi) = \sqrt{3}$, joten ääriarvot ovat ± 2. [2p]

Tehtävä 3.
(a) Olkoot $a > 0$ ja
$$f(t) = ae^{-at},$$
kun $t \geq 0$. Osoita, että funktio $f(t)$ toteuttaa ehdon
$$\int_0^\infty f(t)dt = 1,$$
jokaisella parametrin a arvolla. Tästä seuraa, että $f(t)$ on erään jatkuvan todennäköisyysjakauman tiheysfunktio. Jakaumaa kutsutaan eksponenttijakaumaksi.
(b) Eksponenttijakaumalla voidaan kuvata mm. peräkkäisten neutriinohavaintojen välistä aikaa. Eräällä havaintolaitteella peräkkäisten havaintojen väliajan mediaani oli 46,90 minuuttia, eli puolessa tilastoiduista tapauksista väliaika oli tätä pienempi ja puolessa suurempi. Millä parametrin a arvolla tiheysfunktio $f(t)$ kuvaa näitä mittaustuloksia?

Pisteytys. (a) Lasketaan $\int_0^T f(t)\,dt = \Big/_0^T (-e^{-at}) = 1 - e^{-aT}$ [2+2p]ja havaitaan että raja-arvo on 1 kun $T \to \infty$. [2p]
(b) Mediaani saadaan sillä muuttujan T arvolla, jolla $\int_0^T f(t)\,dt = \frac{1}{2}$ [2p]. a-kohdan perusteella $1 - e^{-aT} = \frac{1}{2}$ [2p] eli $a = \frac{\ln(2)}{T} = \frac{\ln(2)}{46{,}90}$[2p].

Tehtävä 4. Olkoon $A = (1, 2)$. Vektorin $\overline{AB}$ pituus on 3, ja se on kohtisuorassa vektoria $3\bar{i} + 4\bar{j}$ vastaan. Määritä pisteen B koordinaatit.

Pisteytys. Vektoria $3\bar{i}+4\bar{j}$ vastaan kohtisuoria vektoreita ovat esimerkiksi $\overline{n} = \pm(4\bar{i} - 3\bar{j})$, joiden pituus on $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ [2p]. Näiden suuntaiset vektorit, joiden piotuus on 3 ovat $\frac{3}{5}\overline{n}$ [2p]. Täten $\overline{AB} = \pm\Big(\frac{12}{5}\bar{i} - \frac{9}{5}\bar{j}\Big)$ ja vektori $\overline{OB} = \overline{OA} + \overline{AB}$ [2p]. Saamme $\overline{OB} = \frac{17}{5}\bar{i} + \frac{1}{5}\bar{j}$ [2p] tai $\overline{OB} = -\frac{7}{5}\bar{i} + \frac{19}{5}\bar{j}$ [2p]. Pisteen B koordinaatit ovat siis $\Big(\frac{17}{5}, \frac{1}{5}\Big)$ tai $\Big(-\frac{7}{5}, \frac{19}{5}\Big)$ [2p].

Tehtävä 5. Osoita, että funktio

$$h(x) = \begin{cases} x^2\big(5\sin\left(\frac{1}{x}\right) - 6\cos(x)\big), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

on derivoituva kohdassa $x = 0$.

Pisteytys. Merkitään $g(x) = 5\sin\left(\frac{1}{x}\right) - 6\cos(x)$. Havaitaan ensin että $-11 \leq g(x) \leq 11$ [2 p]. Koska $h(0) = 0$, niin erotusosamäärä on

$$\frac{h(x) - h(0)}{x} = \frac{x^2 g(x)}{x} = xg(x). \quad [4p]$$

Tällöin

$$-11|x| \leq xg(x) \leq 11|x|, \quad [2p]$$

josta seuraa että $\lim_{x\to 0} xg(x) = 0$ [2p]. Tällöin $h'(0) = 0$ [2 p].