

Matematiikan valintakoetehtävät

22.5.2023

Ratkaisut

1. Ratkaise epäyhtälö [(a)-kohta **3p.**, (b)-kohta **3p.** ja (c)-kohta **4p.**]

(a) $|2x - 3| < 1$, (b) $|1 - 3x| > 2$, (c) $|x^2 - 1| \leq 2$.

Ratkaisu:

(a) Ehto $|2x - 3| < 1$ on yhtäpitävä sen kanssa, että molemmat ehdot $2x - 3 < 1$ ja $-1 < 2x - 3$ ovat (samanaikaisesti) voimassa.

Ensimmäisestä ehdosta saadaan

$$2x - 3 < 1 \Leftrightarrow 2x < 4 \Leftrightarrow x < 2 \text{ ja toisesta}$$

$$-1 < 2x - 3 \Leftrightarrow -1 + 3 < 2x \Leftrightarrow 1 < x.$$

Näin ollen ratkaisu on $1 < x < 2$.

(b) Ehto $|1 - 3x| > 2$ on voimassa tarkalleen silloin, kun on voimassa joko ehto $1 - 3x > 2$ tai ehto $1 - 3x < -2$.

Ensimmäisestä ehdosta saadaan

$$1 - 3x > 2 \Leftrightarrow 1 > 3x + 2 \Leftrightarrow 1 - 2 > 3x \Leftrightarrow -\frac{1}{3} > x \text{ ja toisesta}$$

$$1 - 3x < -2 \Leftrightarrow 1 < 3x - 2 \Leftrightarrow 1 + 2 < 3x \Leftrightarrow 1 < x.$$

Näin ollen ratkaisu on $x < -\frac{1}{3}$ tai $x > 1$.

(c) Ehto $|x^2 - 1| \leq 2$ on voimassa tarkalleen silloin, kun molemmat ehdot $x^2 - 1 \leq 2$ ja $x^2 - 1 \geq -2$ ovat (samanaikaisesti) voimassa.

Ensimmäisestä ehdosta saadaan

$$x^2 - 1 \leq 2 \Leftrightarrow x^2 \leq 3 \Leftrightarrow -\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}.$$

Ehto $x^2 - 1 \geq -2$ taas on yhtäpitävä ehdon $x^2 \geq -1$ kanssa. Jokainen x toteuttaa tämän ehdon, joten c-kohdan ratkaisu on $-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$.

2. (a) **[5p.]** Osoita, että $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ on kokonaisluku aina, kun n on kokonaisluku ja $n \geq 1$.
- (b) **[5p.]** Osoita, että myös $\frac{n(n^2+9n+8)}{6}$ on kokonaisluku aina, kun n on kokonaisluku ja $n \geq 1$.

Ratkaisu:

(a) Tarkastellaan osoittajaa $n(n+1)(n+2)$. Luvut n , $n+1$ ja $n+2$ ovat kolme peräkkäistä positiivista kokonaislukua, joten jokin niistä on jaollinen

luvulla 3. Vastaavasti n ja $n + 1$ ovat kaksi peräkkäistä positiivista kokonaislukua, joten toinen niistä on jaollinen luvulla 2. Näin ollen osoittaja $n(n + 1)(n + 2)$ on jaollinen luvulla $2 \cdot 3 = 6$.

(b) Osoitetaan, että osoittaja $n(n^2 + 9n + 8)$ on jaollinen luvulla 6. Tehtävän a-kohdan nojalla tiedetään, että $n(n + 1)(n + 2)$ on jaollinen luvulla 6. Tarkastellaan erotusta

$$n(n^2 + 9n + 8) - n(n + 1)(n + 2) = n((n^2 + 9n + 8) - (n + 1)(n + 2)) = n(n^2 + 9n + 8 - n^2 - 3n - 2) = n(6n + 6) = 6n(n + 1).$$

Näin ollen $n(n^2 + 9n + 8) = n(n + 1)(n + 2) + 6n(n + 1)$ on jaollinen luvulla 6.

3. (a) **[2p.]** Osoita, että $\frac{x^2+1}{x+1} = x - 1 + \frac{2}{x+1}$ aina, kun $x \in \mathbb{R}$ ja $x \neq -1$.
- (b) **[4p.]** Määritellään funktiot $f(x)$ ja $g(x)$ ehdoilla
 $f(x) = \frac{x^2+1}{x+1}$ (kun $x \neq -1$) ja $g(x) = x - 1$.
 Osoita, että $\int_{1000}^{1001} f(x) dx - \int_{1000}^{1001} g(x) dx = 2 \ln(1 + \frac{1}{1001})$.
- (c) **[4p.]** Olkoon $h(x)$ funktio $h(x) = \ln(1 + x) - x$, kun $x \geq 0$.
 Osoita, että $h(x) \leq 0$ aina, kun $x \geq 0$.
 Päättele edelleen, että $2 \ln(1 + \frac{1}{1001}) \leq 0,002$.

Ratkaisu:

(a) Tarkastellaan yhtälön oikeaa puolta:

$$x - 1 + \frac{2}{x+1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x+1} + \frac{2}{x+1} = \frac{(x^2-1)+2}{x+1} = \frac{x^2+1}{x+1}.$$

Siis oikea oikea puoli ja vasen puoli ovat yhtäsuuria aina, kun ne ovat määriteltyjä (s.o. $x \neq -1$).

(b) a-kohdan nojalla $f(x) - g(x) = \frac{2}{x+1}$ aina, kun $x \neq -1$.

Siten $\int_{1000}^{1001} f(x) dx - \int_{1000}^{1001} g(x) dx = \int_{1000}^{1001} \frac{2}{x+1} dx = 2(\ln 1002 - \ln 1001)$,
 sillä $\frac{d}{dx} \ln(x + 1) = \frac{1}{x+1}$. Edelleen saadaan

$$2(\ln 1002 - \ln 1001) = 2 \ln \frac{1002}{1001} = 2 \ln(1 + \frac{1}{1001}).$$

(c) Koska $h(0) = 0$ ja $h'(x) = \frac{1}{x+1} - 1 = \frac{1}{x+1} - \frac{x+1}{x+1} = \frac{1-(x+1)}{x+1} = \frac{-x}{x+1} \leq 0$,

on $h(x) \leq 0$ aina, kun $x \geq 0$. Erityisesti $h(\frac{1}{1001}) \leq 0$,

joten $\ln(1 + \frac{1}{1001}) - \frac{1}{1001} \leq 0$ ja siten $\ln(1 + \frac{1}{1001}) \leq \frac{1}{1001} \leq \frac{1}{1000}$.

Tästä seuraa, että $2 \ln(1 + \frac{1}{1001}) \leq 0,002$.

4. Olkoon $f(x)$ funktio $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$, missä $a, b \in \mathbb{R}$ ovat vakioita. Osoita, että

- (a) [3p.] Funktio $f(x)$ on kasvava kaikilla x :n arvoilla, kun $a = 2$ ja $b = 2$.
- (b) [3p.] $f(x)$ ei ole kasvava kaikilla x :n arvoilla, kun $a = 2$ ja $b = 1$.
- (c) [4p.] $f(x)$ on kasvava kaikilla x :n arvoilla, jos $a^2 < 3b$.

Ratkaisu:

Tarkastellaan funktion $f(x)$ käyttäytymistä derivaatan $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ avulla.

(a) Kun $a = 2$ ja $b = 2$, on $f'(x) = 3x^2 + 4x + 2$.

Osoitetaan, että $f'(x) > 0$ kaikilla x :n arvoilla. Selvitetään tätä varten, onko ylöspäin aukeavalla paraabelilla $y = 3x^2 + 4x + 2$ olemassa 0-kohta (yksi tai kaksi 0-kohtaa). Tarkastellaan 2. asteen yhtälöä $3x^2 + 4x + 2 = 0$. Tällä yhtälöllä ei ole (reaaliluku)ratkaisua, sillä $4^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = -8 < 0$. Näin ollen $f'(x) > 0$ kaikilla x :n arvoilla, ja funktio $f(x)$ on siis kasvava.

(b) Nyt $f'(x) = 3x^2 + 4x + 1$. Yhtälöllä $3x^2 + 4x + 1 = 0$ on kaksi ratkaisua, sillä $4^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1 = 4 > 0$.

Derivaatan 0-kohtien välissä $f'(x) < 0$, joten funktio $f(x)$ ei ole kasvava kaikilla x :n arvoilla.

(c) Osoitetaan, että ylöspäin aukeavalla paraabelilla $y = 3x^2 + 2ax + b$ ei ole 0-kohtia, kun $a^2 < 3b$. Derivaatan 0-kohdat saadaan 2. asteen yhtälön ratkaisukaavalla

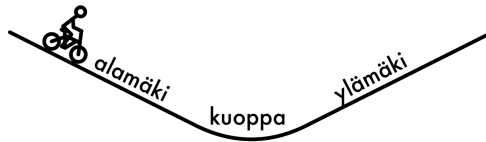
$$3x^2 + 2ax + b = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2a \pm \sqrt{(2a)^2 - 4 \cdot 3 \cdot b}}{2 \cdot 3} \text{ ja eo. lausekkeessa}$$

$$(2a)^2 - 4 \cdot 3 \cdot b = 4(a^2 - 3b) < 0 \text{ sillä } a^2 < 3b.$$

Valintakoe MAFYKE 2023: Fysiikan osuus

F.1. (10 p) Tämä tehtävä koostuu viidestä monivalintakysymyksestä. Valitse jokaiseen kysymykseen mielestäsi oikea vastaus. Perusteluja ei tarvitse antaa. Kukin oikea vastaus on 2 p arvoinen ja väärä vastaus 0 p.

Polkupyöräilijä ajaa loivaan alamäkeen. Hän jarruttaa juuri sopivasti niin, että pyörän vauhti pysyy koko ajan vakiona. Alamäki kääntyy ylämäeksi, ja mäkien väliin jää kaareva kuoppa. Pyöräilijä ajaa myös kuopan poikki vakiovauhtia ja polkee sitten ylämäkeen niin ikään vakiovauhtia. Tarkastellaan pyörää ja pyöräilijää yhdessä yhtenä kokonaisuutena. Oletetaan, että pyörään ja pyöräilijään vaikuttaa merkittävästi vain painovoima, pinnan tukivoima sekä kitka, ja jätetään muut voimat kuten ilmanvastus huomioimatta.



1.1 Mitä voidaan päätellä pyörään vaikuttavien voimien keskinäisestä suuruudesta alamäessä?

- (a) Painovoima on pienempi kuin pinnan tukivoima.
- (b) Painovoima on yhtä suuri kuin pinnan tukivoima.
- (c) Painovoima on suurempi kuin pinnan tukivoima mutta pienempi kuin tukivoiman ja kitkavoiman suuruudet yhteensä.
- (d) Painovoima on yhtä suuri kuin pinnan tukivoiman ja kitkavoiman suuruudet yhteensä.
- (e) Painovoima on suurempi kuin pinnan tukivoiman ja kitkavoiman suuruudet yhteensä.

1.2 Mitä voidaan päätellä pyörään vaikuttavien voimien keskinäisestä suuruudesta kuopan pohjalla?

Samat vastausvaihtoehdot kuin kohdassa 1.1.

1.3 Mitä voidaan päätellä pyörään vaikuttavien voimien keskinäisestä suuruudesta ylämäessä?

Samat vastausvaihtoehdot kuin kohdassa 1.1.

1.4 Mitä voidaan päätellä renkasiin kohdistuvan kitkavoiman suunnasta liikkeen aikana?

- (a) Kitka vaikuttaa koko ajan pyörän liikkeen suuntaa vastaan.
- (b) Kitka vaikuttaa kummassakin mäessä liikkeen suuntaa vastaan, kuopassa kitka on lähes nolla.
- (c) Kitka vaikuttaa alamäessä liikkeen suuntaa vastaan, kuopassa ja ylämäessä kitka on lähes nolla.
- (d) Kitka vaikuttaa alamäessä liikkeen suuntaa vastaan, kuopassa se on lähes nolla, ja ylämäessä kitka vaikuttaa liikkeen suuntaan.
- (e) Kitka vaikuttaa alamäessä liikkeen suuntaan, kuopassa se on lähes nolla, ja ylämäessä kitka vaikuttaa liikkeen suuntaa vastaan.

1.5 Mitä voidaan päätellä pyöräilijään kohdistuvasta kokonaisvoimasta liikkeen aikana?

- (a) Kokonaisvoima on koko ajan nolla.
- (b) Kokonaisvoima osoittaa koko ajan liikkeen suuntaan.
- (c) Kokonaisvoima osoittaa alamäessä liikkeen suuntaan, ylämäessä liikkeen suuntaa vastaan ja on kuopassa likimain nolla.
- (d) Kokonaisvoima on kummassakin mäessä nolla ja osoittaa kuopassa liikkeen suuntaa vastaan.
- (e) Kokonaisvoima on kummassakin mäessä nolla ja osoittaa kuopassa ylöspäin.

Ratkaisu: 1.1 (c). (2 p)

Koska pyörä liikkuu suoraan vakiovauhdilla, siihen kohdistuva kokonaisvoima on nolla. Vapaakappalekuvassa painovoiman, pinnan tukivoiman ja kitkavoiman nuolet muodostavat suorakulmaisen kolmion, jonka hypotenuusa on painovoima. Painovoimaa kuvaava nuoli on siis pidempi kuin kumpikaan kahdesta muusta nuolesta, mutta lyhyempi kuin näiden nuolten pituudet yhteensä.

1.2 (a) (2 p)

Pyörän liikkeen suunta muuttuu. Pyörä liikkui alaviistoon ja hetken päästä se liikkuu yläviistoon. Nopeuden suunta muuttuu siis ylöspäin, ja tähän suuntaan pyörään kohdistuvan kokonaisvoimankin täytyy osoittaa. Koska pyörää vetää alaspäin painovoima ja ylöspäin työntää pinnan tukivoima, pinnan tukivoiman täytyy kasvaa kuopan pohjalla painovoimaa voimakkaammaksi.

1.3 (c) (2 p)

Sama perustelu kuin kohdassa 1.1.

1.4 (d) (2 p)

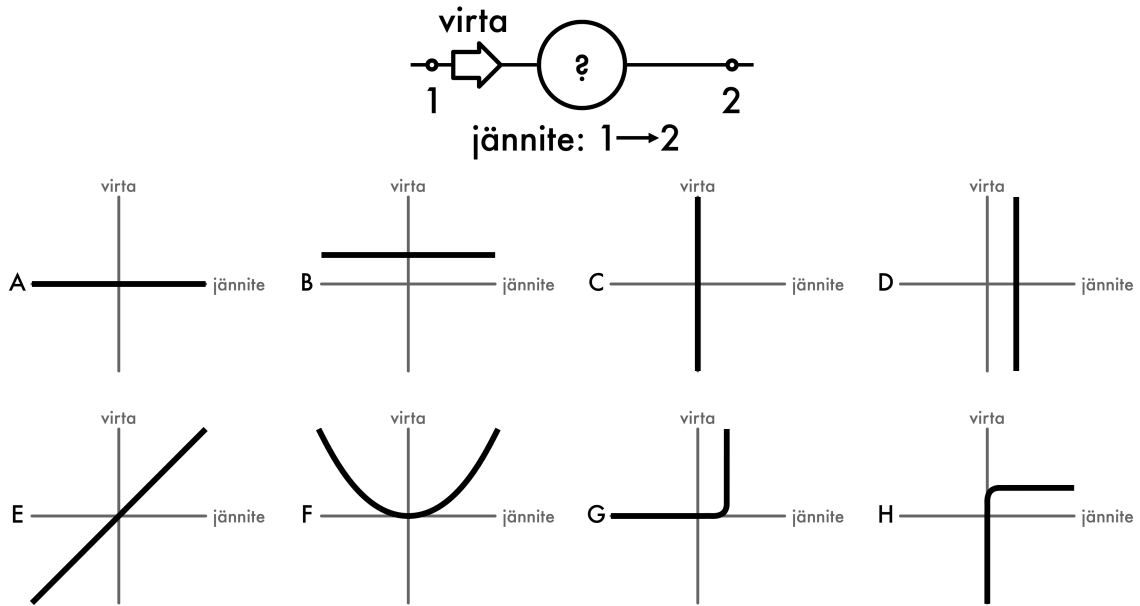
Painovoimalla on kummassakin mäessä komponentti kohti kuoppaa. Ilman kitkavoimaa pyörä ei kulkisi vakiovauhtia vaan siihen kohdistuisi kokonaisvoima kohti kuoppaa. Alamäessä kitkan täytyy siis osoittaa yläviistoon eli liikkeen suuntaa vastaan. Muuten pyörän vauhti kasvaisi. Ylämäessä kitkan täytyy puolestaan työntää pyörää ylämäkeen eli liikkeen suuntaan. Muuten pyörän vauhti pienenis. Kuopan pohjalla kitka käy nollassa, kun sen suunta vaihtuu.

1.5 (e) (2 p)

Tämä on jo päätelty kohdissa 1.1–1.3. Kummassakin mäessä liike on tasaista ja kokonaisvoima on siis nolla. Kuopan pohjalla nopeus kääntyy ylöspäin ja kokonaisvoima osoittaa siis ylöspäin.

F.2. (10 p)

Mittaaat sähköisen komponentin läpi kulkevan virran ja sen päiden välisen jännitteen riippuvuutta. Alle piirretyssä kuvassa kysymysmerkki kuvaa tutkittavaa komponenttia. Virta on positiivinen, kun se kulkee nuolen suuntaan. Jännite on positiivinen, kun siirryttäessä pisteestä 1 pisteeseen 2 tapahtuu jännitehäviö eli pisteen 1 ollessa korkeammassa potentiaalissa kuin piste 2. Kuvaan on piirretty myös erilaisia mahdollisia kuvaajia virralle ja jännitteelle (A–H).



Selitä *perustellen*, mitä kuvaajaa uskoisit tuloksen eniten muistuttavan, jos tutkittava komponentti on

- erinomainen johde
- vastus
- paristo, plusnapa kiinni pisteessä 1
- kondensaattori, mittaushetkellä varaamaton
- diodi, päästösuunta kuvaan merkityn virran suuntaan.

Jokaisessa kohdassa oikean kuvaajan valinta on 1 p arvoinen ja oikea perustelu myös 1 p arvoinen.

Ratkaisu:

(a) Hyvän johteen resistanssi on pieni. Niinpä johteessa voi kulkea suurikin virta ja silti jännitehäviö on hyvin pieni. Ideaalisessa johteessa jännitehäviö olisi nolla virrasta riippumatta. (1 p)

Oikea kuvaaja on C (1 p).

TAI

Hyvässäkin johteessa on resistanssia ellei kyse ole suprajohteesta, joten johteessa tapahtuu pieni virtaan verrannollinen jännitehäviö. Tällä päättelyllä oikea kuvaaja olisi E. Tehtävänannon maininta erinomaisesta johteesta kuitenkin viittaa siihen, että resistanssia ei pitäisi havaita. Perusteltu vastaus E on 1 p arvoinen. Jos lisäksi on pohdittu, että hyvin pieni resistanssi johtaa kuvaajaan C, saa toisenkin 1 p.

(b) Vastuksessa on resistanssia, mikä aiheuttaa jännitehäviön virran kulkusuunnassa. Jännite on Ohmin lain mukaisesti suoraan verrannollinen virtaan. (1 p)

Oikea kuvaaja on E (1 p).

(c) Paristo pyrkii pitämään napojensa välisen jännitteen vakiona. Todellisessa paristossa on myös sisäistä resistanssia, jolloin virta vaikuttaa hiukan napojen väliseen jännitteeseen, mutta jos virta ei ole suuri, muutos ei ole merkittävä. Jännite on siis likimain vakio mutta ei nolla, ja tämä ei riipu virrasta.

(1 p)

Oikea kuvaaja on D (1 p).

(d) Kondensaattorin jännite riippuu sen varauksesta, koska kondensaattorin jännitteen luo sen sisäinen sähkökenttä ja tämä kenttä syntyy kondensaattoriin varastoituneista sähkövarauksista. Jos kondensaattori on varaamaton, sen jännite on nolla. (1 p)

Oikea kuvaaja on C (1 p).

Huom. tasavirtapiirissä kondensaattorin läpi ei kulje virtaa, mutta kondensaattorin navoille kulkee virta kondensaattorin latautuessa tai purkautuessa. Tämä muuttaa varausta ja vaikuttaa sitä kautta jännitteeseen, mutta jännitettä ei voi suoraan päätellä virrasta. Jos kondensaattorin varaus on nolla, sen jännitekin on nolla riippumatta virrasta.

(e) Diodi päästää virtaa läpi yhteen suuntaan ja estää virran kulun toiseen suuntaan. Jos diodi on kytketty päästösuunta valittuun positiiviseen suuntaan, negatiiviseen suuntaan ei pitäisi kulkea lainkaan virtaa. Kun virta kulkee positiiviseen suuntaan, diodissa tapahtuu jännitehäviö, jonka suuruus riippuu vain heikosti virran suuruudesta. (1 p)

Oikea kuvaaja on G (1 p).

F.3. (10 p)

Sylinterissä on 2.00 litraa ilmaa $3.0\text{ }^{\circ}\text{C}$ lämpötilassa ja 101 kPa paineessa. Ilma puristetaan nopeasti männällä 0.80 litran tilavuuteen, jolloin paineeksi tulee 364 kPa . Sitten odotetaan, että ilma sylinterissä saavuttaa ympäröivän ilman lämpötilan, $20.0\text{ }^{\circ}\text{C}$. Sylinterin tilavuuden annetaan pysyä vakiona lämpötilojen tasaantuessa.

(a) Laske paine sylinterissä lopuksi. (max 3 p)

(b) Selitä sanallisesti, miten ja miksi sylinterissä olevan ilman sisäenergia muuttuu prosessin eri vaiheissa. Mikä energiaa muuttaa? (max 7 p)

Ratkaisu: (a) Ideaalikaasun tilanyhtälön mukaan ilmalle pätee aina likimain $pV = nRT$, missä p on paine, V tilavuus, n ainemäärä, R kaasuvakio ja T lämpötila (kelvineissä). (1 p)

Merkitään suureiden arvoja alkutilassa indeksillä "A" ja lopussa indeksillä "L". Ainemäärä ei prosessissa muutu, joten ainemäärän voi laskea alkutilasta,

$$n = \frac{p_A V_A}{RT_A}. \quad (1)$$

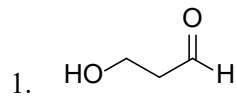
Lopputilassa paine on siis (2 p)

$$p_L = \frac{nRT_L}{V_L} = \frac{p_A V_A T_L}{V_L T_A} = 268 \text{ kPa}. \quad (2)$$

(b) Pisteitä saa, kun nämä fysikaaliset seikat sisältyvät vastaukseen (max 7 p):

- Kaasun lämpötila riippuu sen sisäenergiasta. Jos lämpötila nousee, sisäenergian täytyy kasvaa. Jos lämpötila laskee, sisäenergian täytyy vähentyä. (1 p)
- Energia säilyy. Jos kaasun energia kasvaa, energiaa pitää tulla ympäristöstä. Jos kaasun energia pienenee, energiaa pitää siirtyä ympäristöön. (1 p)
- Energiaa voi siirtyä työnä tai lämpönä. (1 p)
- Puristuksen aikana kaasun lämpötila nousee. Sisäenergia siis kasvaa. (Tämän voi tarkistaa tilanyhtälöstä laskemalla, mutta sen voi myös päätellä laskemattakin.) (1 p)
- Koska puristaminen tehdään nopeasti, energiaa ei juurikaan ehdi siirtyä lämpönä. Siispä energiaa siirretään kaasuun mekaanisena työnä. (1 p)
- Lämpötilojen tasaantuessa kaasun lämpötila laskee. Sisäenergia siis pienenee. (1 p)
- Jäähdytymisen aikana kaasuun ei tehdä millään tavalla työtä. Energiaa siirtyy kaasusta ympäristöön lämpönä. (1 p)

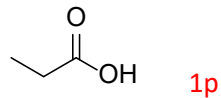
Kemian tehtävät vastauksineen



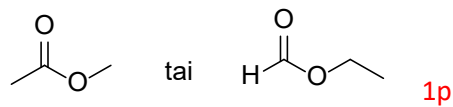
Kuvassa oleva 3-hydroksipropanaali on laajakirjoinen antimikrobinen aine.

a) Piirrä 3-hydroksipropanaalille rakennesisomeeri, jossa on

i) karboksyylihapporyhmä

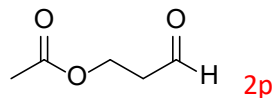


ii) esteriryhmä

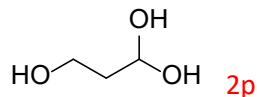


b) Mikä päätuote muodostuu 3-hydroksipropanaalista seuraavissa tapauksissa. Piirrä rakennekaava.

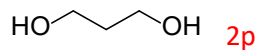
i) 3-hydroksipropanaali reagoi etikkahapon kanssa



ii) 3-hydroksipropanaalille tapahtuu hydraatio

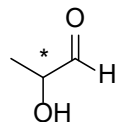


iii) 3-hydroksipropanaalille tehdään hydraus

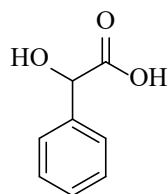


c) 3-hydroksipropanaalin yksi rakennesisomeeri on 2-hydroksipropanaali. Kummalla näistä esiintyy optista isomeriaa eli enantiomeriaa? Perustele.

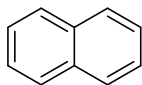
2-hydroksipropanaalilla (1p) voi esiintyä optista isomeriaa (enantiomeriaa), koska siinä on asymmetrinen hiiliatomi (1p).



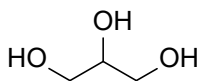
2. a) Vertaile seuraavien yhdisteiden rasva- ja vesiliukoisuutta. Mitkä seikat vaikuttavat liukoisuuteen?



mantelihappo



naftaleeni



glyseroli

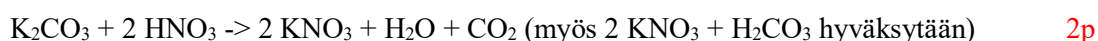
Pooliset funktionaaliset ryhmät (esim. karboksyylihapporyhmä, hydroksyyli-ryhmä) lisäävät vesiliukoisuutta. Ne muodostavat vesimolekyylien kanssa vetysidoksia. Glyseroli liukenee siten hyvin veteen. Mantelihappo liukenee kohtalaisesti veteen poolisten funktionaalisten ryhmien takia. Poolittomalla naftaleenilla on erittäin huono liukoisuus veteen.

Rasvaliukoisessa molekyylissä on poolittomia hiilivetyketjuja tai poolittomia funktionaalisia ryhmiä, jotka lisäävät molekyylin rasvaliukoisuutta. Naftaleeni on aromaattinen hiilivety, jonka rakenteessa on kaksi bentseenirengasta. Poolittomana molekyylinä naftaleeni on rasvaliukoinen. Mantelihapolla on myös poolittomia ominaisuuksia (bentseenirengas), jonka takia se on myös osittain rasvaliukoinen. Glyseroli on vähiten rasvaliukoinen.

5p

b) Sanonta ”viekää tuhkatkin pesästä” juontaa juurensa 1600-luvulle, jolloin talonpojat maksoivat ns. salpietariveroa, toimittamalla kruunulle muun muassa tuhkaa ja karjanlantaa. Lannasta olevista nitraateista ja tuhkan kaliumkarbonaatista saatiin kaliumnitraattia eli salpietaria. Kaliumnitraatin muodostuminen voidaan ajatella kaliumkarbonaatin ja typpihapon väliseksi reaktioksi. Salpietaria käytettiin erityisesti mustan ruudin valmistukseen, jossa kaliumnitraatin osuus on 75% ruudin massasta.

i) Kirjoita tasapainotettu reaktioyhtälö kaliumkarbonaatin reaktiolle typpihapon kanssa.



ii) Paljonko kaliumkarbonaattia tarvitaan yhden ruutikilon sisältämän kaliumnitraatin valmistukseen? Kaliumnitraatin moolimassa voidaan pyöristää lukuarvoon 100 g/mol ja kaliumkarbonaatin lukuarvoon 138 g/mol.

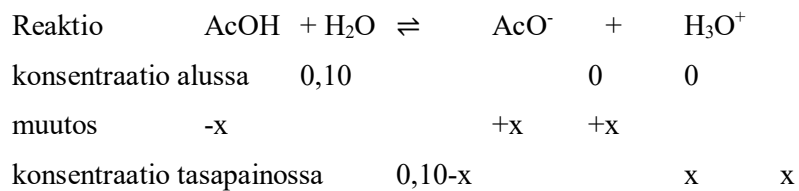
kilossa ruutia on 750 g KNO_3 , joten $n(\text{KNO}_3) = 7,5 \text{ mol}$. $n(\text{K}_2\text{CO}_3) = 0,5 \times n(\text{KNO}_3)$. $m(\text{K}_2\text{CO}_3) = 0,5 \times 7,5 \text{ mol} \times 138 \text{ g/mol} = 517 \text{ g}$. 3p

3. a) Esitä, miten hapon vesiliuoksen pH voidaan laskea - periaate riittää, joten lukuarvoja ei tarvitse sijoittaa eikä varsinaista laskutoimitusta tarvitse tehdä. Hapon pitoisuus liuoksessa on 0,10 mol/l ja käytetty happo on

i) Etikkahappo, $K_a(\text{CH}_3\text{COOH}) = 1,8 \cdot 10^{-5} \text{ mol/dm}^3$, $\text{p}K_a = 4,7$

ii) Rikkihappo, $K_a(\text{H}_2\text{SO}_4) = 1 \cdot 10^3 \text{ mol/dm}^3$; $K_a(\text{HSO}_4^-) = 1 \cdot 10^{-2} \text{ mol/dm}^3$

i) Heikon hapon pH voidaan laskea johtamalla tasavakion kaavasta $K_a = \frac{[\text{AcO}^-] \cdot [\text{H}_3\text{O}^+]}{[\text{AcOH}]}$. Tästä saadaan $[\text{H}_3\text{O}^+]$ ratkaistua, kun tunnetaan lähtökonsentraatio.



Koska $[\text{AcO}^-] = [\text{H}_3\text{O}^+]$, niin $[\text{H}_3\text{O}^+]^2 / [\text{AcOH}] = K_a$.

Tästä saadaan $[\text{H}_3\text{O}^+] = (K_a \cdot [\text{AcOH}])^{1/2}$ ja $\text{pH} = -\log((K_a \cdot [\text{AcOH}])^{1/2})$ 3p

$$([\text{H}_3\text{O}^+] = (K_a \cdot [\text{AcOH}])^{1/2} = (1,8 \cdot 10^{-5} \cdot 0,10)^{1/2} = 1,3 \cdot 10^{-3} \text{ mol/l ja } \text{pH} = -\log(1,3 \text{ mol/l}) \Rightarrow \underline{\text{pH} = 2,9})$$

ii) Rikkihappo dissosioituu tuottaen protoneja ja vetysulfaattia. $[\text{H}_3\text{O}^+] = c(\text{H}_2\text{SO}_4)$. (pH= 1.) 3p

b) Jos etikkahapon vesiliuoksen $\text{pH} > 4,7$, niin onko se liuoksessa pääasiassa neutraaleina etikkahappomolekyyleinä vai asetaatti-ioneina?

Etikkahappomolekyyleinä 2p

c) Jos kohdassa a) mainitut vesiliuokset i) ja ii) neutraloidaan NaOH-liuoksella ($c = 0,10 \text{ mol/l}$), niin kumpi happoliuoksista kuluttaa enemmän tätä emäsluosta? Miksi?

Rikkihappoliuos, koska yhdessä molekyylissä on kaksi protonia. 2p