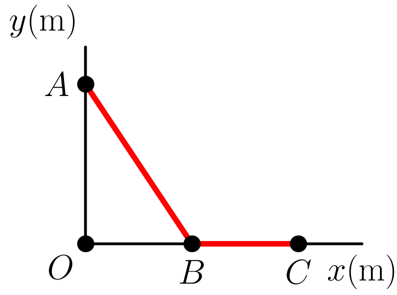
Fysiikan valintakoe 11.5.2016 klo 9-12

1. Kappale lähtee levosta liikkeelle pisteessä $A = (0,3)$ ja liukuu kitkattomasti, ensin kaltevaa tasoa pitkin pisteeseen $B = (x,0)$ ja siitä edelleen vaakaatasoa pitkin pisteeseen $C = (4,0)$. Putoamiskiihtyvyys on 9,81 m/s^2.



   a) Mikä on kappaleen vauhti pisteessä C? [2p]

   b) Mikä on kappaleen kiihtyvyys, jos $B = C$? [2p]

   c) Missä ajassa kappale selvittää reitin b-kohdan tapauksessa? [3p]

   d) Esitä graafisesti kappaleen käyttämä aika pisteen B paikan x funktiona ja määritä graafisen esityksen perusteella minimiaika, jossa kappale selvittää reitin. [3p]

Ratkaisu:

a) Potentiaalienergia muuttuu liike-energiaksi.

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 \Leftrightarrow v = \sqrt{2gh}.$$

Kun sijoitetaan $g = 9.81$ m/s^2 ja $h = A_y = 3$ m (tasan kolme metriä), saadaan $\underline{v = 7{,}67 \text{ m/s}}$. Pisteen B sijainnilla ei ole väliä, koska sen jälkeen nopeus on vakio.

b) Kaltevalla kitkattomalla tasolla kappaleen kiihtyvyys on putoamiskiihtyvyyden tason suuntainen komponentti. Jos α on kaltevan tason ja vaakatason välinen kulma, niin kiihtyvyys

$$a = g\sin\alpha = g\,\frac{A_y}{\sqrt{C_x^2 + A_y^2}}.$$

Kun sijoitetaan g, A_y ja $C_x = 4$ m, saadaan $\underline{a = 5{,}89 \text{ m/s}^2}$.

c) Levosta lähtien vakiokiihtyvyydellä kuljettu matka

$$s = \frac{1}{2}at^2 \Leftrightarrow t = \sqrt{\frac{2s}{a}}.$$

Kun sijoitetaan $a = 5{,}89$ m/s^2 ja $s = 5$ m, saadaan $\underline{t = 1{,}30 \text{ s}}$. Toisaalta vakiokiihtyvyydellä

$$v = at \Leftrightarrow t = \frac{v}{a} = \frac{7{,}67 \text{ m/s}}{5{,}89 \text{ m/s}^2} = 1{,}30 \text{ s}.$$

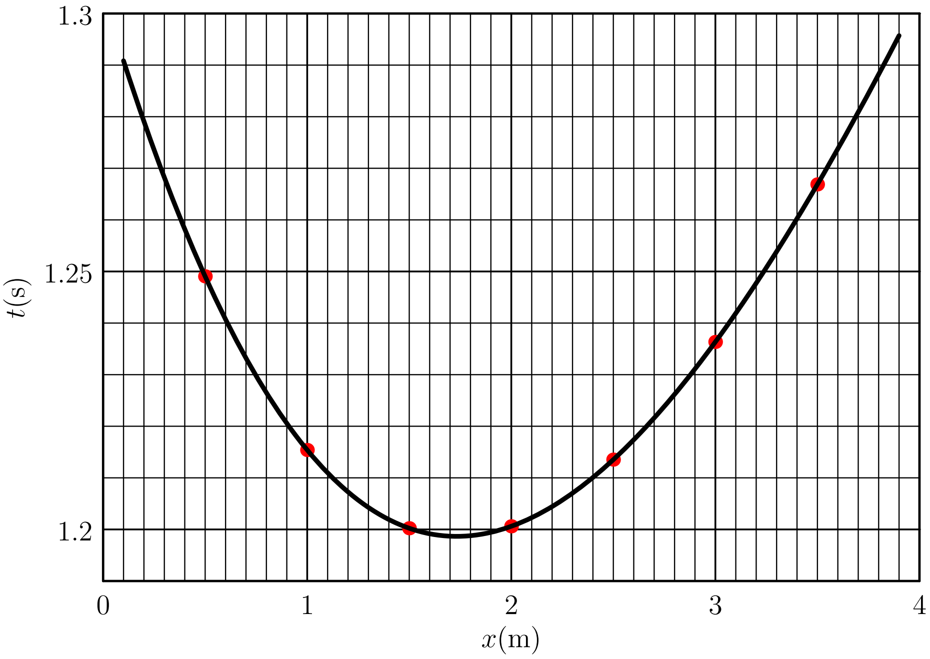
d) Merkitään pisteiden A ja B välistä matkaa tunnuksella $s_1 = \sqrt{x^2 + A_y^2}$. Tällöin $\sin\alpha = A_y/s_1$ ja kiihtyvyys $a_1 = gA_y/s_1$. Mukaillen c-kohtaa saadaan A:n ja B:n väliselle ajalle lauseke

$$t_1 = \sqrt{\frac{2s_1}{a_1}} = \sqrt{\frac{2}{gA_y}}s_1 = \sqrt{\frac{2}{gA_y}}\sqrt{x^2 + A_y^2}.$$

Loppumatka pisteiden B ja C välillä $s_2 = C_x - x$, mennään vakionopeudella $v_2 = \sqrt{2gA_y}$, jolloin pisteiden B ja C välillä kuluu aika $t_2 = s_2/v_2$. Kokonaisaika $t_1 + t_2$ on

$$t(x) = \sqrt{\frac{2}{gA_y}}\sqrt{x^2 + A_y^2} + \frac{C_x - x}{\sqrt{2gA_y}}$$

Kuvaajasta saadaan minimiajaksi $\underline{t(1{,}75 \text{ m}) = 1{,}20 \text{ s}}$.



2. Vaa'alla olevassa dekantterilasissa on vettä, jonka tiheys on 998 kg/m^3, ja vaaka näyttää lukemaa 1,23 kg. Kun lasiin upotetaan ohuen langan varassa metallikuula siten, että se ei kosketa lasin pohjaa eikä seinämiä, vaa'an lukemaksi tulee 1,34 kg. Kun metallikuula lasketaan lasin pohjalle, vaa'an lukemaksi tulee 3,36 kg.

   a) Miksi vaa'an lukema muuttuu, vaikka kuula ei kosketa lasin pohjaa eikä seinämiä? [3p]
   b) Mikä on metallikuulan tilavuus? [3p]
   c) Mikä on metallikuulan tiheys? [4p]

   Ratkaisu:

   a) Vesi kohdistaa upotettuun kuulaan nosteen, jonka vastavoima kohdistuu lasin pohjaan. Asia voidaan tulkita myös niin, että kuula nostaa veden pintaa, jolloin lasin pohjaan kohdistuu suurempi hydrostaattinen paine. Lasin pohjalla vallitseva hydrostaattinen paine kerrottuna pohjan pinta-alalla on voima, jonka neste kohdistaa lasin pohjaan.
   b) Arkhimedeen lain mukaan uponneeseen kappaleeseen vaikuttaa noste $N = \rho V g$, missä ρ on nesteen tiheys ja V kappaleen tilavuus. Havaittu noste on painon muutos $\Delta G = \Delta m\, g$, missä Δm on vaa'an näyttämän massan muutos. Tästä saadaan yhtälö

$$N = \Delta G \Leftrightarrow \rho V g = \Delta m\, g \Leftrightarrow V = \frac{\Delta m}{\rho}.$$

Kun sijoitetaan $\Delta m = 1{,}34$ kg $- 1{,}23$ kg $= 0{,}11$ kg ja $\rho = 998$ kg/m^3, saadaan $V = 1{,}1 \cdot 10^{-4}$ m^3 $= \underline{1{,}1 \text{ dl}}$.

c) Kun kuula on laskettu lasin pohjalle, on vaa'an lukema kasvanut kuulan massalla $m_\mathrm{k} = 3{,}36$ kg $- 1{,}23$ kg $= 2{,}13$ kg. Kun tämä sijoitetaan tiheyden lausekkeeseen, saadaan

$$\rho_\mathrm{k} = \frac{m_\mathrm{k}}{V} = \frac{2{,}13 \text{ kg}}{1{,}1 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3} = \underline{19 \text{ kg/m}^3}.$$

Huom! Kun kuula on lasin pohjalla, siihen kohdistuu edelleen noste ja nosteen vastavoima kohdistuu lasin pohjaan, mutta kuula kohdistaa lasin pohjaan kontaktivoiman, joka on sen oma paino kevennettynä nosteella. Näin lasin pohjaan kohdistuu nesteen painon lisäksi vain kuulan paino.

3. Doppler-ilmiön aiheuttamia taajuuden muutoksia voidaan laskea kaavalla

$$f = f_0 \frac{c \pm v}{c \pm u},$$

missä c on äänen nopeus. Nopeuksista v ja u toinen on äänilähteen ja toinen havaitsijan nopeus.

a) Kumpi nopeuksista u ja v on äänilähteen ja kumpi havaitsijan nopeus, perustele sanallisesti? [2p]

b) Nostaako vai laskeeko kohti tuleva äänilähde havaittua taajuutta, perustele sanallisesti? [2p]

c) Nostaako vai laskeeko äänilähdettä kohti kulkeminen havaittua taajuutta, perustele sanallisesti? [2p]

d) Seisot kadun varressa, kun ambulanssi ohittaa sinut pillit ulvoen lähietäisyydeltä. Millä nopeudella ambulanssi ohittaa sinut, jos havaitset taajuuden muuttuvan puoli sävelaskelta ohituksen aikana? Puolen sävelaskeleen muutos tarkoittaa, että korkeamman taajuuden suhde matalampaan on $\sqrt[12]{2}$. Oleta, että ennen ohitusta ambulanssi tulee kohti kysytyllä nopeudella ja sen jälkeen loittonee samalla nopeudella. Äänen nopeus ilmassa on 333 m/s. [4p]

Ratkaisu:

a) Havaittu taajuus f ilmoittaa kuinka usein aaltorintama kohtaa havaitsijan. Mitä suurempi on havaitsijan nopeus sitä enemmän muuttuu aaltorintamien kohtaamistahti. Havaitsijan liikkeen aiheuttama taajuuden muutos on siis suoraan verrannollinen hänen nopeuteensa eli viivan päällä oleva nopeus v on havaitsijan nopeus.

Aallon pituus on se matka, joka muodostuu aaltorintaman ja äänilähteen välille värähdysajassa. Äänilähteen liikkeen aiheuttama aallonpituuden muutos on siis suoraan verrannollinen äänilähteen nopeuteen. Koska taajuus on kääntäen verrannollinen aallonpituuteen, viivan alla oleva nopeus u on äänilähteen nopeus.

b) Äänilähteen kulkusuunnassa äänilähde ajaa aaltorintamaa takaa, jolloin aallonpituus pienenee ja taajuus kasvaa. Kohti tuleva äänilähde nostaa taajuutta.

c) Kun kuljetaan kohti äänilähdettä, mennään aaltoja vastaan, jolloin aaltorintamien kohtaamistahti eli taajuus kasvaa.

d) Jos f_1 ja f_2 ovat kohti tulevan ja loittonevan ambulanssin taajuudet, niin b-kohdan perusteella $f_1 > f_2$. Koska havaitsijan nopeus $v = 0$, voidaan kirjoittaa

$$f_1 = f_0 \frac{c}{c-u} \quad \text{ja} \quad f_2 = f_0 \frac{c}{c+u}.$$

Puolen sävelaskelen taajuuden lasku tarkoittaa, että

$$\frac{f_1}{f_2} = \sqrt[12]{2} \Leftrightarrow \frac{c+u}{c-u} = \sqrt[12]{2} \Leftrightarrow u = \frac{\sqrt[12]{2}-1}{\sqrt[12]{2}+1}\, c.$$

Kun sijoitetaan $c = 333$ m/s, saadaan ambulanssin nopeudeksi $\underline{9{,}61 \text{ m/s} \approx 35 \text{ km/h}}$.

4. Ideaalikaasun tilanyhtälön mukaan $pV = nRT$, missä $R = 8{,}3145$ J/(mol·K). Ideaalikaasun adiabaattisessa prosessissa $pV^\kappa =$ vakio, missä κ on adiabaattivakio. Yksi mooli paineessa 101 kPa ja lämpötilassa 273 K olevaa ideaalikaasua ($\kappa = 1{,}67$) puristetaan adiabaattisesti niin, että paine kasvaa kolminkertaiseksi.

a) Mitä tarkoitetaan adiabaattisella prosessilla? [2p]

b) Onko ideaalikaasun tilanyhtälö voimassa adiabaattisessa prosessissa? [2p]

c) Mikä on kaasun tilavuus puristuksen lopussa? [3p]

d) Mikä on kaasun lämpötila puristuksen lopussa? [3p]

Ratkaisu:

a) Adiabaattisessa prosessissa systeemin ja ympäristön välillä ei siirry lämpöä.

b) On toki, mutta yhdestä yhtälöstä voidaan ratkaista vain yksi tuntematon. Adiabaattisessa prosessissa kaikki kolme tilansuuretta p, V ja T muuttuvat. Jos vain p:n muutos tunnetaan, on jäljellä kaksi tuntematonta.

c) Ideaalikaasun tilanyhtälöstä saadaan alkutilavuus

$$V_1 = \frac{nRT}{p_1} = \frac{1 \text{ mol} \cdot 8{,}3145 \text{ J/(mol} \cdot \text{K)} \cdot 273 \text{ K}}{101 \cdot 10^3 \text{ Pa}} = 22{,}5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3.$$

Kirjoitetaan adiabaattista prosessia kuvaava yhtälö muotoon

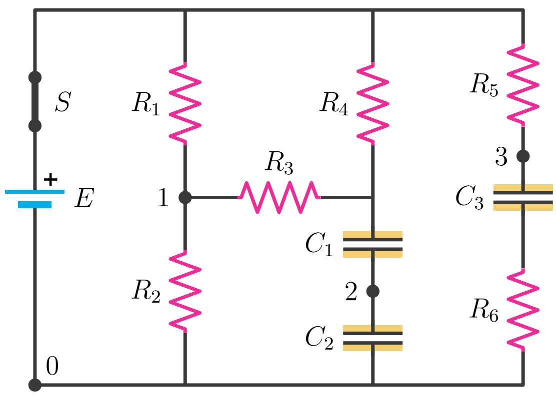
$$p_1 V_1^\kappa = p_2 V_2^\kappa \Leftrightarrow \frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^\kappa \Leftrightarrow \frac{V_2}{V_1} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{1/\kappa} \Leftrightarrow V_2 = V_1 \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{1/\kappa}$$

Kun tähän sijoitetaan κ, V_1 ja $p_1/p_2 = 1/3$, saadaan $\underline{V_2 = 11{,}6 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3}$

d) Kun jäljellä on enää yksi tuntematon, voidaan käyttää ideaalikaasun tilanyhtälöä

$$T_2 = \frac{p_2 V_2}{nR} = \frac{303 \cdot 10^3 \text{ Pa} \cdot 11{,}6 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3}{1 \text{ mol} \cdot 8{,}3145 \text{ J/(mol} \cdot \text{K)}} = \underline{423 \text{ K}}.$$

5. Kuvan virtapiirissä lähdejännite $E = 12$ V ja piste 0 on maadoitettu nollapotentiaaliin. Vastuksien resistanssit ovat $R_1 = 1{,}0\ \Omega$, $R_2 = 2{,}0\ \Omega$, $R_3 = 3{,}0\ \Omega$, $R_4 = 4{,}0\ \Omega$, $R_5 = 5{,}0\ \Omega$ ja $R_6 = 6{,}0\ \Omega$. Kondensaattorien kapasitanssit ovat $C_1 = 1{,}0\ \mu$F, $C_2 = 2{,}0\ \mu$F ja $C_3 = 3{,}0\ \mu$F. Tarkastellaan tilannetta yli sekunnin kuluttua kytkimen S sulkemisesta.



a) Mitkä ovat virrat vastuksissa $R_1 \ldots R_6$? [4p]

b) Mitkä ovat potentiaalit pisteissä $1 \ldots 3$? [3p]

c) Mitkä ovat kondensaattorien $C_1 \ldots C_3$ varaukset? [3p]

Ratkaisu:

a) Piirin eri osien RC-aikavakiot ovat muutamia mikrosekunteja, joten yhden sekunnin kuluttua kytkimen sulkemisesta kondensaattorit eivät päästä enää virtaa läpi. Jos virtoja merkitään samoin indeksein kuin vastuksia, voidaan heti todeta, että $\underline{I_5 = I_6 = 0}$. Vastukset $1 \ldots 4$ muodostavat sarja- ja rinnakkaiskytkentöjen yhdistelmän, joka voidaan laskea seuraavasti: $R_{\text{kok}} = R_{134} + R_2$, missä $R_{134} = (1/R_1 + 1/R_{34})^{-1}$, missä $R_{34} = R_3 + R_4$

$$R_{\text{kok}} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3 + R_4}\right)^{-1} + R_2 = 2{,}875\ \Omega.$$

Kaikki virta menee vastuksen 2 kautta

$$I_2 = I_{\text{kok}} = \frac{E}{R_{\text{kok}}} = \frac{12\text{ V}}{2{,}875\ \Omega} = \underline{4{,}2\text{ A}}.$$

Vastuksen 2 yli on jännite $U_2 = I_2 R_2 = 8{,}3$ V ja vastuksen 1 yli on jännite $U_1 = E - U_2 = 3{,}7$ V. Vastuksessa 1 kulkee virta $\underline{I_1 = U_1/R_1 = 3{,}7\text{ A}}$. Loput virrasta 2 tulee vastuksien 3 ja 4 läpi eli $\underline{I_3 = I_4 = I_2 - I_1 = 0{,}52\text{ A}}$.

b) Pisteen 1 potentiaali $\underline{V_1 = U_2 = 8{,}3\text{ V}}$. Pisteen 2 potentiaalin laskemiseksi pitää ensin laskea kondensaattorien 1 ja 2 yli oleva jännite. Merkitään $U_{12} = E - I_4 R_4 = 9{,}9$ V. Sarjaan kytketyillä kondensaattoreilla on sama varaus

$$Q_1 = Q_2 = C_{12} U_{12} = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)^{-1} U_{12}.$$

Kun sijoitetaan C_1, C_2 ja U_{12}, saadaan $Q_1 = Q_2 = 6{,}6\ \mu$C. Pisteen 2 potentiaali on sama kuin kondensaattorin 2 yli oleva jännite $\underline{V_2 = Q_2/C_2 = 3{,}3\text{ V}}$. Koska vastuksessa 5 ei kulje virtaa, on pisteen 3 potentiaali lähdejännitteen suuruinen $\underline{V_3 = 12\text{ V}}$

c) Kondensaattorien 1 ja 2 varaukset laskettiin jo edellä $\underline{Q_1 = Q_2 = 6{,}6\ \mu\text{C}}$. Koska vastuksissa 5 ja 6 ei kulje virtaa, on kondensaattorin 3 yli lähdejännite E. Siten kondensaattorin 3 varaus on $\underline{Q_3 = C_3 E = 36\ \mu\text{C}}$

6. Eräs syövän hoidossa käytetty menetelmä on istuttaa kasvaimeen radioaktiivista ainetta ja toivoa, että säteily tuhoaa enemmän syöpäsoluja kuin synnyttää uusia. Eräs tarkoitukseen käytetty aine on palladiumin isotooppi ${}^{103}_{46}\mathrm{Pd}$, joka hajoaa spontaanisti elektronisieppauksella rodiumiksi ${}^{103}_{45}\mathrm{Rh}$. Palladiumin puoliintumisaika on 17 vrk. Atomimassayksikkö $u = 1{,}6605402 \cdot 10^{-27}$ kg ja valon nopeus tyhjiössä $c = 2{,}99792458 \cdot 10^{8}$ m/s

   a) Mitä tapahtuu elektronisieppauksessa ja miten energiaa siirtyy kudokseen sen seurauksena? [2p]
   b) Mikä on sellaisen istutteen aktiivisuus, joka sisältää ainoana radioaktiivisena komponenttina 250 mg ${}^{103}_{46}\mathrm{Pd}$-isotooppia? [3p]
   c) Kuinka paljon yhdessä hajoamisessa vapautuu energiaa, kun neutraalin palladiumatomin massa on 102,906114 u ja neutraalin rodiumatomin massa on 102,905500 u? [3p]
   d) Kuinka paljon b-kohdan näyte vapauttaa energiaa kahdessa viikossa? [2p]

Ratkaisu:

a) Elektronisieppauksessa ydin kaappaa sisäänsä atomin sisäkuoren elektronin. Ytimessä tapahtuu reaktio $p + e^{-} \to n + \nu_e$, missä protoni muuttuu neutroniksi. Leptoneihin kuuluva elektronin neutriino ν_e kompensoi leptoneihin kuuluvan elektronin häviämisen.

   Ennen pitkää ylemmällä kuorella oleva elektroni tipahtaa puuttuvan sisäkuoren elektronin paikalle, jolloin syntyy röntgensäteilyä. Tytärydin voi jäädä viritystilaan, jonka laukeaminen tuottaa gammasäteilyä.

b) Aktiivisuus $A = \lambda N$, missä λ on hajoamisvakio ja N on aktiivisten ydinten lukumäärä. Hajoamisvakio

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = \frac{0{,}693}{17 \text{ vrk} \cdot 86400 \text{ s/vrk}} = 4{,}72 \cdot 10^{-7} \text{ 1/s}.$$

   Ydinten lukumäärä

$$N = \frac{\text{näytteen massa}}{\text{atomin massa}} = \frac{250 \cdot 10^{-6} \text{ kg}}{103 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}} = 1{,}46 \cdot 10^{21}.$$

   Aktiivisuus on $\underline{6{,}9 \cdot 10^{14} \text{ Bq}}$.

c) Massan väheneminen määrällä Δm vapauttaa energiaa määrän $\Delta m c^2$, missä c on valon nopeus tyhjiössä. Kun palladium hajoaa rodiumiksi vähenee massa määrällä $\Delta m = 1{,}01957 \cdot 10^{-30}$ kg ja energiaa vapautuu määrä $\underline{9{,}16 \cdot 10^{-14} \text{ J}}$

d) Aktiivisten ydinten lukumäärä hetkellä t saadaan yhtälöstä

$$N = N_0 e^{-\lambda t}$$

   missä N_0 on aktiivisten ydinten lukumäärä alkuhetkellä ja t on alkuhetkestä kulunut aika. Kun sijoitetaan λ, $N_0 = 1{,}46 \cdot 10^{21}$ ja kahden viikon aika $t = 14 \cdot 86400 \text{ s} = 1209600 \text{ s}$, saadaan $N = 8{,}94 \cdot 10^{16}$. Hajonneiden ydinten lukumäärä $\Delta N = N_0 - N$. Kun tämä kerrotaan yhdessä hajoamisessa vapautuneella energialla, saadaan kahdessa viikossa vapautunut energia 134 MJ. Hups! taisi tulla miljoonakertainen (tappava) annos.