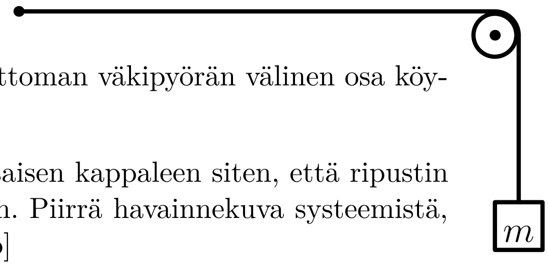
Fysiikan valintakoe 16.5.2017 klo 9-12

1. Kevyt köysi on kiinnitetty kuvan mukaisesti vasemmalla kiinteään pisteeseen ja oikealla m-massaiseen kappaleeseen. Kiinteän pisteen ja kitkattoman väkipyörän välinen osa köydestä on vaakasuorassa.



   a) Ripustat köyden vaakasuoralle osalle m-massaisen kappaleen siten, että ripustin pääsee liukumaan kitkattomasti köyttä pitkin. Piirrä havainnekuva systeemistä, kun se on asettunut ripustamisen jälkeen. [1p]

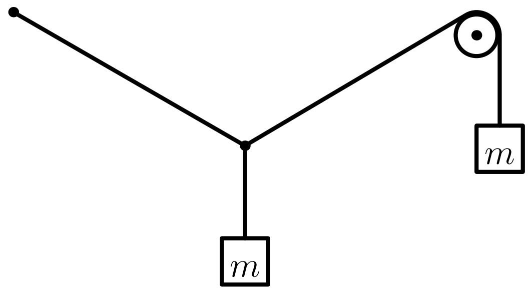
   b) Piirrä ripustimen voimakuvio (vapaakappalekuva) ja perustele lyhyesti miksi ripustin asettuu piirtämääsi kohtaan. [3p]

   c) Laske mihin kulmiin vaakatasoon nähden köysi asettuu ripustimen eri puolilla. [3p]

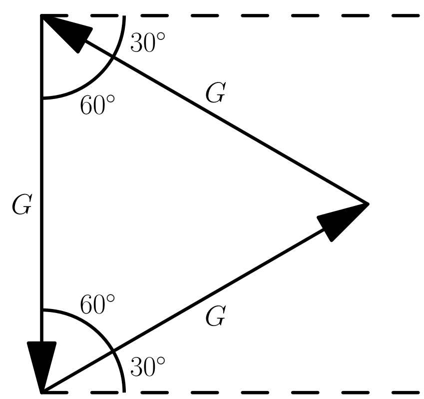
   d) Ripustat m-massaisen kappaleen vaakasuoran osan puoliväliin siten, että ripustin ei pääse liukumaan köyttä pitkin. Piirrä havainnekuva ja ripustimen voimakuvio, mutta älä laske kulmia vaan päättele kummalla puolella ripustinta köyteen kohdistuu suurempi jännitysvoima ja perustele lyhyesti päätelmäsi. [3p]

Ratkaisu:

a)

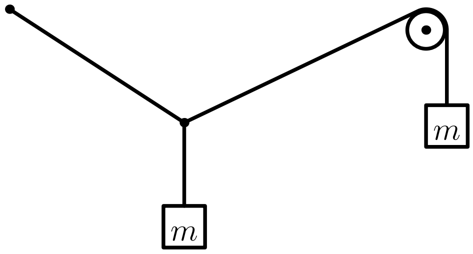


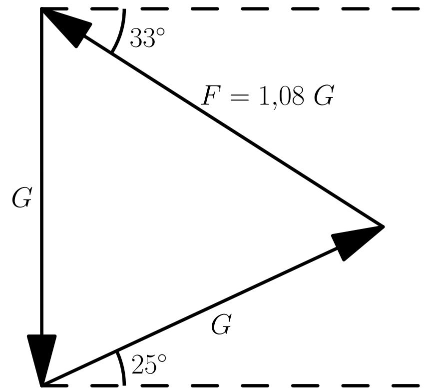
b) Koska väkipyörä ja ripustin kohdistavat köyteen vain köyttä vastaan kohtisuoria voimia, köyttä jännittävä voima on kaikkialla $G = mg$. Ripustinta vetää alaspäin sama voima $G = mg$. Voimakuvio on tasasivuinen kolmio, jonka kaikki kulmat ovat 60°. Tästä seuraa, että köyden pitää olla ripustimen molemmin puolin samassa kulmassa, mikä toteutuu vain ripustimen ollessa keskellä.



c) Voimakuviosta yllä nähdään suoraan, että köysi asettuu kulmiin 30° vaakatasoon nähden.

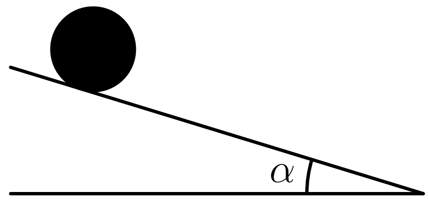
d)





Havainnekuvasta voi päätellä, että köyden pitää olla ripustimen vasemmalla puolella jyrkemmässä kulmassa vaakatasoon nähden. Köyden jännitysvoimien vaakakomponenttien pitää olla yhtäsuuret ripustimen molemmin puolin. Voimakuviosta voidaan päätellä, että tämä toteutuu vain, jos köyden jännitysvoima F ripustimen vasemmalla puolella on suurempi kuin jännitysvoima G oikealla puolella. Voimakuvioon on merkitty kulmat ja voima F, joita ei tarvinnut laskea.

2. Umpinainen pallo on kuvan mukaisesti kaltevalla tasolla, jonka kaltevuuskulma $\alpha = 17°$. Pallon massa $m = 1{,}3$ kg ja säde $r = 6{,}8$ cm. Pallon ja tason välinen lepokitkakerroin $\mu = 0{,}15$. Putoamiskiihtyvyys $g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$.

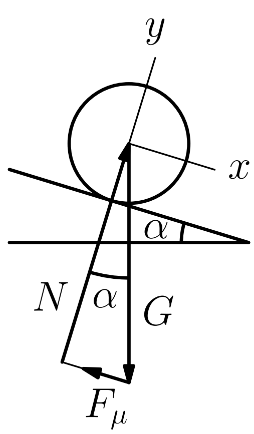


   a) Piirrä pallon voimakuvio. [3p]

   b) Laske pallon kiihtyvyys. [4p]

   c) Pallon kiihtyvyys riippuu vain siihen vaikuttavista voimista. Jos kiihtyvyys on suurempi kuin liukumatta pyörivän pallon kiihtyvyys, pallo liukuu pyörimisen lisäksi. Mikä pitää lepokitkakertoimen μ vähintään olla, jotta pallo pyörisi liukumatta? Pallon hitausmomentti $J = (2/5)mr^2$. [3p]

Ratkaisu:



   a) Voimakuviossa on valittu x-akseli kaltevan tason suuntaiseksi ja y-akseli normaalivoiman suuntaiseksi.

   b-kohdassa oli tarkoitus antaa tehtäväksi laskea liukuvan pallon kiihtyvyys, joka on sama kuin liukuvan kappaleen kiihtyvyys siitä huolimatta, että pallo pyörii liukumisen lisäksi (ks. c-kohta). Oletusta liukumisesta ei ollut annettu eikä liukukitkakerrointa, mutta ne, jotka olivat tehtävää laskeneet olivat johtaneet kaavan liukuvan kappaleen kiihtyvyydelle, mikä katsottiin oikeaksi ratkaisuksi.

   b) Voimakuviosta saadaan voimien suuruuksille yhtälöt

$$
\begin{aligned}
N &= G_y \\
G_x - F_\mu &= ma.
\end{aligned}
$$

   Liukuvaan palloon vaikuttava kitkavavoima ei riipu pintojen välisestä liukumisnopeudesta $\Rightarrow F_\mu = \mu_k N = \mu_k G_y$, missä μ_k on liikekitkakerroin. Kun tämä sijoitetaan alempaan yhtälöön, saadaan

$$\begin{aligned}G_x - \mu_k G_y &= ma \Leftrightarrow \\ mg\sin\alpha - \mu_k mg\cos\alpha &= ma \Leftrightarrow \\ (\sin\alpha - \mu_k\cos\alpha)g &= a\end{aligned}$$

c) Pyörimisen peruslain mukaan $M = J\Delta\omega/\Delta t$, missä M on kappaleeseen kohdistuva vääntömomentti, J on hitausmomentti kiertoakselin suhteen ja $\Delta\omega/\Delta t$ on kulmakiihtyvyys. Jos pallo pyörii liukumatta, kulmanopeus on etenemisvauhdin suhde pallon säteeseen

$$\omega = \frac{v}{r} \Rightarrow \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{1}{r}\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{a}{r}.$$

Kitkavoima kohdistaa palloon vääntömomentin $M = F_\mu r$. Pyörimisen peruslain nojalla voidaan kirjoittaa

$$F_\mu r = \frac{2}{5}mr^2\frac{a}{r} \Leftrightarrow F_\mu = \frac{2}{5}ma.$$

Kun kitkavoiman lauseke sijoitetaan b-kohdan toiseen yhtälöön, saadaan kiihtyvyydeksi

$$mg\sin\alpha - \frac{2}{5}ma = ma \Leftrightarrow a = \frac{5}{7}g\sin\alpha.$$

Pyörivälle pallolle F_μ on lepokitkaa, joka voi saada arvoja nollan ja maksimiarvon $\mu N = \mu mg\cos\alpha$ väliltä. Kun lepokitkan maksimiarvo sijoitetaan b-kohdan toiseen yhtälöön, saadaan pyörivän pallon minimikiihtyvyydeksi

$$mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha = ma \Leftrightarrow a = (\sin\alpha - \mu\cos\alpha)g.$$

Kun kiihtyvyys ja minimikiihtyvyys tunnetaan, voidaan kirjoittaa epäyhtälö

$$\frac{5}{7}g\sin\alpha \geq (\sin\alpha - \mu\cos\alpha)g \Leftrightarrow \mu \geq \frac{2}{7}\tan\alpha = 0{,}088.$$

Voidaan todeta, että tehtävän pallo pyörii liukumatta.

3. Lähintä etäisyyttä, josta voi muodostua kuva silmän verkkokalvolle, kutsutaan lähipisteeksi. Se on normaalisti 25 cm. Pitkänäköisen henkilön lähipiste on kauempana. Kun esine viedään kauemmaksi, verkkokalvolle muodostuva kuva pienenee ja henkilön on vaikeampi erottaa esineen yksityiskohtia. Pitkänäköiselle henkilölle suunniteltujen silmälasien tarkoitus on muodostaa normaaliin lähipisteeseen tuodusta esineestä valekuva henkilön lähipisteeseen. Optikko havaitsee, että henkilön lähipiste on etäisyydellä 60 cm silmästä. Oletetaan, että linssi on samalla etäisyydellä kohteesta kuin silmä.

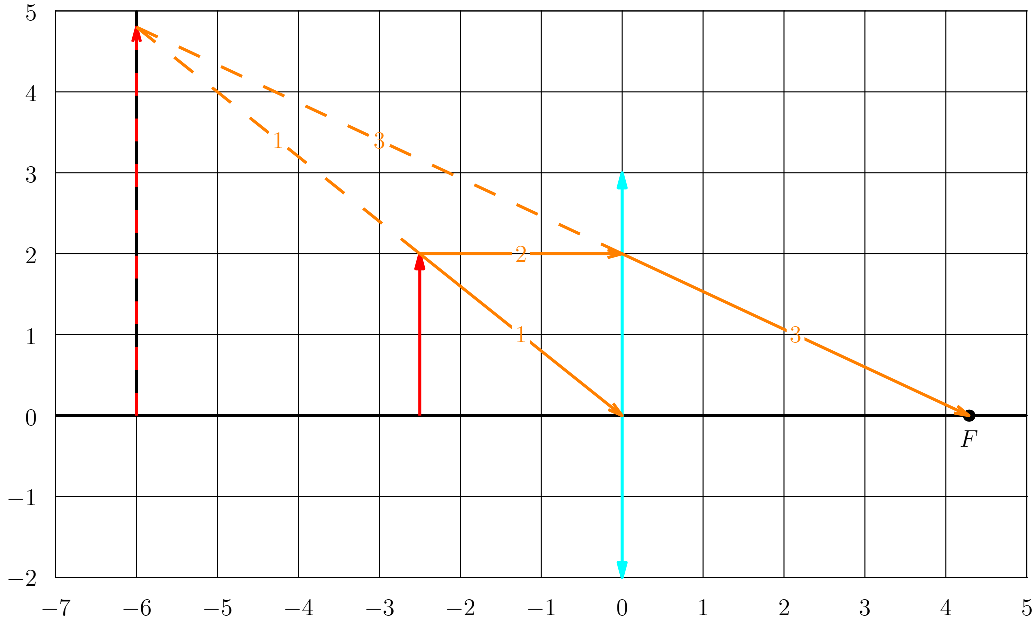
   a) Konstruoi tilanne, jossa linssi muodostaa normaaliin lähipisteeseen tuodusta esineestä valekuvan henkilön lähipisteesen. Piirrä tarvittavat erityiset valonsäteet ja määritä kuvasta linssin polttoväli. [4p]

   b) Laske linssien kuvausyhtälöstä linssin polttoväli ja ilmoita linssin taittovoimakkuus dioptereina. [4p]

   c) Mikä pitäisi linssin taittovoimakkuuden olla, jos henkilön lähipiste olisi äärettömyydessä? [2p]

   Ratkaisu:

a)



Kuvan ruutupaperi on skaalattu niin, että yksi ruutu on 10 cm. Esineestä verteksiin lähtevän säteen 1 jatke kulkee valekuvan kautta. Esineestä optisen akselin suuntaisesti linssiin tuleva säde 2 taittuu polttopisteen kautta kulkevaksi säteeksi 3 siten, että sen jatke leikkaa säteen 1 jatkeen valekuvan kohdalla (60 cm etäisyydellä linssistä). Kuvasta saadaan polttoväliksi n. 43 cm.

b) Esineen etäisyys $a = 25$ cm. Valekuvan etäisyys on $b = -60$ cm (negatiivinen, koska valekuva muodostuu sille puolelle, mistä valo tulee). Linssien kuvausyhtälöstä

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$$

saadaan polttovälille arvo $f = 42.9$ cm ≈ 43 cm. Taittovoimakkuus dioptereina

$$D = \frac{100 \text{ cm}}{f} = \frac{100}{42{,}9} = 2{,}33 \approx 2{,}3.$$

c) Jos esine lähestyy linssin edessä olevaa polttopistettä linssin suunnasta, valekuvan paikka lähestyy ääretöntä. Jos esineen pitää olla lähipisteessä, pitää polttopisteen olla lähipisteen etäisyydellä eli $f = 25$ cm $\Rightarrow D = 4$.

4. Pakastimen sisälämpötila on -18°C ja huoneen lämpötila on 20°C. Pakastimen suorituskyky on puolet maksimaalisesta suorituskyvystä. Laitat pakastimeen 10 litraa 15-asteista vettä ja odotat, että se on saavuttanut pakastimen sisälämpötilan. Oleta, että pakastimen ja huoneen lämpötilat eivät muutu prosessin aikana ja että pakastimesta poistuu vain vedestä tuleva lämpö. Veden ominaislämpökapasiteetti $c_{\mathrm{v}} = 4{,}19$ kJ/(kg°C) ja ominaissulamislämpö $s_{\mathrm{v}} = 333$ kJ/kg. Jään ominaislämpökapasiteetti $c_{\mathrm{j}} = 2{,}1$ kJ/(kg°C).

   a) Mikä on pakastimen suorituskyky? [2p]
   b) Kuinka paljon pakastimesta poistuu lämpöä? [3p]
   c) Kuinka paljon sähköenergiaa lämmön poistumiseen kuluu? [3p]
   d) Kuinka paljon huoneeseen tulee lämpöä? [2p]

Ratkaisu:

a) Jos jäähdytyskone siirtää lämpöä kylmäsäiliöstä lämpötilassa T_2 lämpösäiliöön lämpötilassa T_1, sen maksimaalinen suorituskyky on

$$\varepsilon_{\max} = \frac{T_2}{T_1 - T_2}$$

missä lämpötilat ovat kelvinasteikolla. Kun sijoitetaan $T_1 = 293$ K ja $T_2 = 255$ K, saadaan $\varepsilon_{\max} = 6{,}71 \Rightarrow \varepsilon = 3{,}36 \approx 3{,}4$

b) Pakastimesta poistuu veden jäähtymiseen ja jäätymiseen sekä jään jäähtymiseen liittyvät lämpömäärät

$$|Q_2| = m(c_v|\Delta T_v| + s_v + c_j|\Delta T_j|).$$

Kun sijoitetaan tehtävässä annetut vakiot sekä $m = 10$ kg, $|\Delta T_v| = 15$°C ja $|\Delta T_j| = 18$°C, saadaan $|Q_2| = 4337$ kJ $\approx 4{,}3$ MJ.

c) Jäähdytyskoneen suorituskyky on kylmäsäiliöstä poistuneen lämpömäärän suhde tehtyyn työhön $|W|$

$$\varepsilon = \frac{|Q_2|}{|W|} \Rightarrow |W| = \frac{|Q_2|}{\varepsilon}$$

Kun sähkömoottori tekee työn, kuluu sähköä 1291 kJ $\approx 1{,}3$ MJ

d) Huoneeseen tulee lämpöä määrä

$$|Q_1| = |Q_2| + |W| = 5628 \text{ kJ} \approx 5{,}6 \text{ MJ}$$

5. Kondensaattori ladataan jännitteeseen 12 V ja annetaan sitten purkautua vastuksen R kautta. Kondensaattorin purkautuessa havaitaan viiden sekunnin välein purkautumisvirta. Havainnot on esitetty oheisessa taulukossa.

t/s	0	5	10	15	20	25	30	35	40	50
I/μA	48	35	25	19	13	10	7	5	4	2

a) Esitä graafisesti purkausvirta ajan funktiona. [3p]

b) Määritä graafisen esityksen perusteella kondensaattorin varaus alkuhetkellä. [3p]

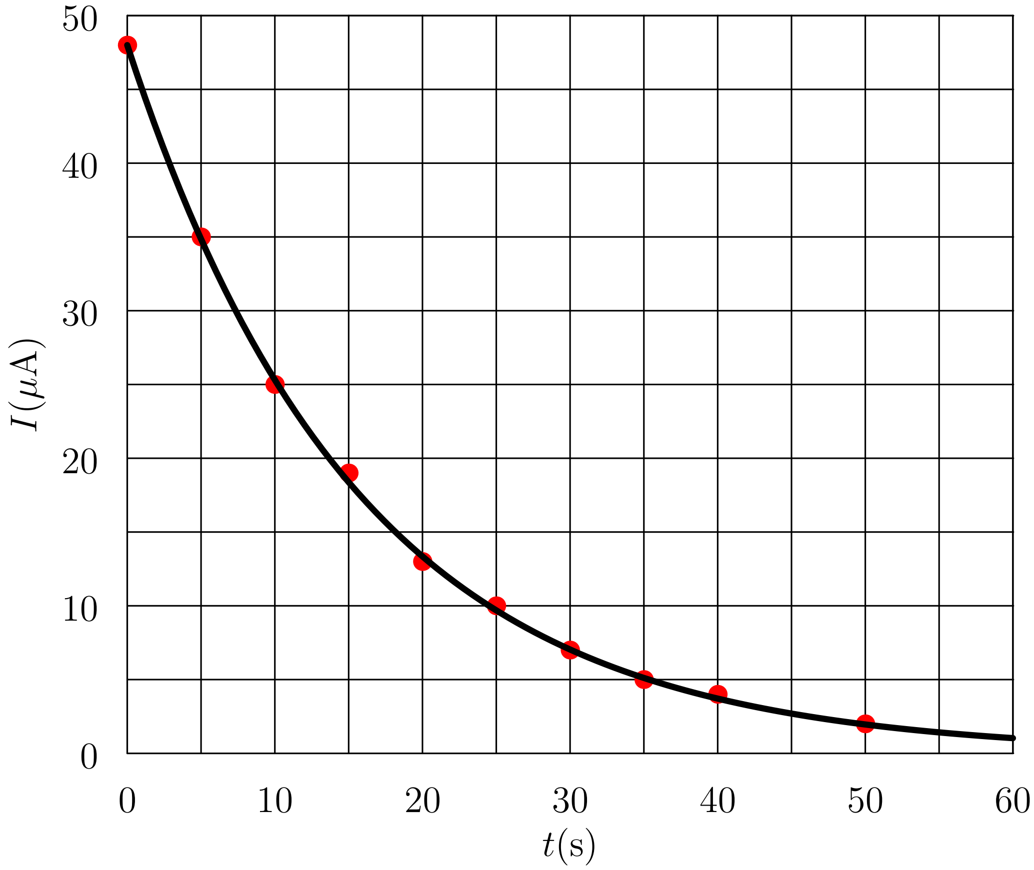
c) Määritä kondensaattorin kapasitanssi. [2p]

d) Määritä vastuksen R resistanssi. [1p]

e) Miten paljon sähköenergiaa muuttui vastuksessa lämmöksi purkamisen aikana? [1p]

Ratkaisu:

a)



Havaintopisteissä näyttää olevan hajontaa. Käyrä ei saa mutkitella hajonnan mukaan, vaan pisteisiin pitää sovittaa silmämääräisesti tasainen käyrä.

b) Varaus $Q = It \Rightarrow$ käyrän alle jäävä pinta-ala on kondensaattorista poistunut varaus. Kuvan perusteella lähes koko pinta-ala (n. 29 ruutua) näkyy välillä 0-60 s. Jos oletetaan, että kuvan ulkopuolelle jäävä pinta-ala on yksi ruutu, saadaan kokonaispinta-alaksi 30 ruutua. Kun yksi ruutu on $(5\ \mu\text{A}) \cdot (5\ \text{s}) = 25\ \mu\text{C}$, saadaan varaukseksi $Q_0 = 30 \cdot 25\ \mu\text{C} = 750\ \mu\text{C}$.

c) Alkuhetken jännite $U_0 = 12$ V ja alkuhetken varaus $Q_0 = 750\ \mu$C. Kapasitanssin määritelmän nojalla

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q_0}{U_0} = \frac{750\ \mu\text{C}}{12\ \text{V}} = 62{,}5\ \mu\text{F} \approx 63\ \mu\text{F}.$$

d) Resistanssi

$$R = \frac{U}{I} = \frac{U_0}{I_0} = \frac{12\ \text{V}}{48\ \mu\text{A}} = 250\ \text{k}\Omega.$$

e) Kaikki kondensaattoriin varastoitunut energia muuttuu vastuksessa lämmöksi kondensaattorin purkautuessa. Kondensaattoriin varastoitunut energia voidaan esittää mm. muodossa

$$E = \frac{Q_0^2}{2C} = \frac{(750\ \mu\text{C})^2}{2 \cdot 62{,}5\ \mu\text{F}} = 4{,}5\ \text{mJ}.$$

6. Valopurjeella voidaan antaa avaruusalukselle vauhtia. Energian lähteenä voi toimia vaikkapa aurinko. Oletetaan, että aurinko on musta kappale, jonka pintalämpötila

on 5800 K. Säteilyn intensiteetti mustan kappaleen pinnalla on σT^4. Säteilyn osuessa aurinkopurjeeseen jokainen fotoni antaa purjeelle pienen impulssin ja kokonaisimpulssi aikayksikössä on purjeeseen kohdistunut keskimääräinen voima. Planckin vakio on $6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Js, valon nopeus on $3{,}00 \cdot 10^8$ m/s, Stefanin-Boltzmannin vakio on $5{,}67 \cdot 10^{-8}$ W/(m^{2}K^4) ja Wienin siirtymislain vakio on $2{,}90 \cdot 10^{-3}$ m·K.

a) Minkä aallonpituuden omaavia fotoneja aurinko emittoi eniten? [2p]
b) Mikä on a-kohdan fotonin liikemäärä? [2p]
c) Kuinka suuren impulssin a-kohdan fotoni antaa valopurjeelle heijastuessaan siitä kohtisuoraan? [1p]
d) Kuinka suuri säteilyteho tulee sadan neliömetrin valopurjeeseen auringon välittömässä läheisyydessä? [1p]
e) Esitä fotonin liikemäärä fotonin energian E avulla. [2p]
f) Säteilyteho on kaikkien fotonien energioiden summa aikayksikköä kohden ja voima on impulssi aikayksikköä kohden. Kuinka suuren voiman säteily aiheuttaisi täydellisesti heijastavaan sadan neliömetrin valopurjeeseen auringon välittömässä läheisyydessä? [2p]

Ratkaisu:

a) Annetuin oletuksin aurinko emittoi eniten fotoneja, jotka edustavat musta kappaleen säteilyn intensiteettimaksimia. Wienin siirtymälain mukaan intensiteettimaksimia vastaava aallonpituus

$$\lambda_{\max} = \frac{b}{T} = \frac{2{,}90 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{K}}{5800\ \mathrm{K}} = 500\ \mathrm{nm}.$$

b) Fotonin liikemäärä

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{Js}}{500\ \mathrm{nm}} = 1{,}33 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{Ns}.$$

c) Fotonin heijastuessa kohtisuoraan valopurjeesta sen liikemäärä muuttuu vastakkaissuuntaiseksi, jolloin impulssi eli liikemäärän muutos on kaksi kertaa liikemäärän suuruinen

$$I = \Delta p = 2p = 2{,}66 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{Ns}.$$

d) Pintaan tuleva säteilyteho on pinnalla vallitseva intensiteetti kerrottuna pinta-alalla. Oletusten mukaan auringon pinnalla on sama intensiteetti kuin lämpötilassa 5800 K olevan mustan kappaleen pinnalla. Stefanin-Boltzmannin lain mukaan sadan neliömetrin valopurjeeseen tulee teho

$$P = A\sigma T^4 = (100\ \mathrm{m}^2) \cdot \left(5{,}67 \cdot 10^{-8} \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2\mathrm{K}^4}\right) \cdot (5800\ \mathrm{K})^4 = 6{,}42\ \mathrm{GW}.$$

e) Fotonin liikemäärä

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{c/f} = \frac{hf}{c} = \frac{E}{c},$$

missä $E = hf$ on fotonin energia.

f) c- ja e-kohtien perusteella impulssi $I = 2p = 2E/c$. Voima on impulssi aikayksikössä

$$F = \frac{\Delta I}{\Delta t} = \frac{2}{c}\frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{2P}{c} = \frac{2 \cdot 6{,}42\ \mathrm{GW}}{3{,}00 \cdot 10^8\ \mathrm{m/s}} = 42{,}8\ \mathrm{N},$$

missä ΔE aikayksikössä valopurjeesta heijasuneiden fotonien yhteelaskettu energia.