Fysiikan valintakoe 21.5.2018 klo 9-12

1. Koripalloilija heittää vapaaheiton. Hän lähettää pallon liikkeelle korkeudelta 1,83 m alkuvauhdilla 7,53 m/s kulmassa 43,2° vaakatason yläpuolella. Pallon lähtöpisteen vaakasuora etäisyys korirenkaan keskipisteestä on 4,21 m ja korirenkaan korkeus on 3,05 m. Oletetaan pallo pistemäiseksi ja ilmanvastus mitättömäksi.

   a) Kuinka kaukaa pallo ohittaa korirenkaan keskipisteen ylä- tai alapuolelta? [3p]

   b) Kuinka kaukaa pallo ohittaa korirenkaan keskipisteen etu- tai takapuolelta? [4p]

   c) Mikä alkuvauhti pallolle pitää antaa, jotta se osuu korirenkaan keskelle? [3p]

   Ratkaisu:

   a) Heittoliikkeessä paikan yhtälöt ovat

$$x = x_0 + v_{0x}t, \quad (1)$$
$$y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2, \quad (2)$$

   missä

$$v_{0x} = v_0 \cos\alpha_0 = (7{,}53\ \mathrm{m/s}) \cdot \cos 43{,}2° = 5{,}489\ \mathrm{m/s},$$
$$v_{0y} = v_0 \sin\alpha_0 = (7{,}53\ \mathrm{m/s}) \cdot \sin 43{,}2° = 5{,}155\ \mathrm{m/s},$$
$$x_0 = 0 \quad \text{ja} \quad y_0 = 1{,}83\ \mathrm{m}.$$

   Pallo on korirenkaan keskipisteen ylä- tai alapuolella, kun $x - x_0 = 4{,}21$ m. Yhtälön (1) mukaan tämä tapahtuu hetkellä $t = 0{,}7670$ s. Samaisella hetkellä yhtälön (2) mukaan $y = 2{,}898$ m. Pallo ohittaa korirenkaan keskipisteen etäisyydellä 15 cm alapuolelta.

   b) Pallo on korirenkaan korkeudella, kun $y = 3{,}05$ m. Yhtälön (2) mukaan tämä tapahtuu hetkillä

$$t = \frac{v_{0y} \mp \sqrt{v_{0y}^2 - 2g(y - y_0)}}{g} = 0{,}3600\ \mathrm{s}\ \text{tai}\ 0{,}6909\ \mathrm{s}.$$

   Kun ajat sijoitetaan yhtälöön (1), saadaan $x - x_0 = 1{,}976$ m tai 3,792 m. Pallo ohittaa korirenkaan keskipisteen etäisyyksillä 2,23 m ja 42 cm etupuolelta. Oikeaksi vastaukseksi hyväksytään jompi kumpi tai molemmat.

   c) Etsitään sellainen alkuvauhti, että $y - y_0 = (3{,}05 - 1{,}83)$ m samalla hetkellä, kun $x - x_0 = 4{,}21$ m. Jos ratkaistaan yhtälöstä (1) aika t ja sijoitetaan yhtälöön (2), saadaan yhtälö

$$y - y_0 = \frac{v_{0y}}{v_{0x}}(x - x_0) - \frac{1}{2}g\left(\frac{x - x_0}{v_{0x}}\right)^2. \quad (3)$$

   Koska $v_{0y}/v_{0x} = \tan\alpha_0$, voidaan yhtälöstä (3) ratkaista suoraviivaisesti v_{0x} ja siitä

$$v_0 = \sqrt{\frac{g/2}{(x - x_0)\tan\alpha_0 - (y - y_0)}}\,\frac{x - x_0}{\cos\alpha_0} = 7{,}736\ \mathrm{m/s}.$$

   Alkuvauhdin pitää olla 7,74 m/s.

2. Olet houkutellut ystäväsi testaamaan itse tekemääsi benjiköyttä. Köyden pituus on 31 m, ja hyppy suoritetaan lavalta, joka on 45 metrin korkeudella. Olet luvannut ystävällesi, jonka massa on 76 kg, että hän käy hypyn aikana alimmillaan 3,7 metrin korkeudella. Oletetaan, että benjiköysi käyttäytyy kuten ideaalinen jousi ($F = kx$). Oletetaan lisäksi, että köyden paino ja ilmanvastus ovat merkityksettömiä voimia ja että ystävä on pistemäinen kohde. Putoamiskiihtyvyys on 9,81 m/s^2.

   a) Mikä on ystävän vauhti sillä hetkellä, kun benjiköysi alkaa venyä? [3p]
   b) Mikä pitää benjiköyden jousivakion olla, jotta lupauksesi toteutuu? [4p]
   c) Jos lupaus toteutuu, mille korkeudelle ystävä jää roikkumaan, kun liike on loppunut? [3p]

Ratkaisu:

a) Energian säilyminen voidaan esittää yhtälönä

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + mgy_1 + \frac{1}{2}kx_1^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgy_2 + \frac{1}{2}kx_2^2, \tag{4}$$

missä v on vauhti, y on korkeus ja x on köyden venymä. Alaviite 1 viittaa tilantaaseen lavalla ja alaviite 2 tilanteeseen 31 m alempana. Tehtävän kuvauksen mukaan

$$\begin{aligned} v_1 &= 0 & v_2 &= v \\ y_1 &= 45 \text{ m} & y_2 &= (45 - 31) \text{ m} \\ x_1 &= 0 & x_2 &= 0, \end{aligned}$$

missä v on vauhti, jonka haluamme selvittää. Kun arvot sijoitetaan yhtälöön (4), saadaan

$$v = \sqrt{2g(y_1 - y_2)} = 25 \text{ m/s}.$$

b) Nyt alaviite 2 viittaa tilanteeseen, jossa $y = 3{,}7$ m ja vauhti on hetkellisesti nolla. Tehtävän kuvauksen mukaan

$$\begin{aligned} v_1 &= 0 & v_2 &= 0 \\ y_1 &= 45 \text{ m} & y_2 &= 3{,}7 \text{ m} \\ x_1 &= 0 & x_2 &= (45 - 31 - 3{,}7) \text{ m}. \end{aligned}$$

Kun arvot sijoitetaan yhtälöön (4), saadaan

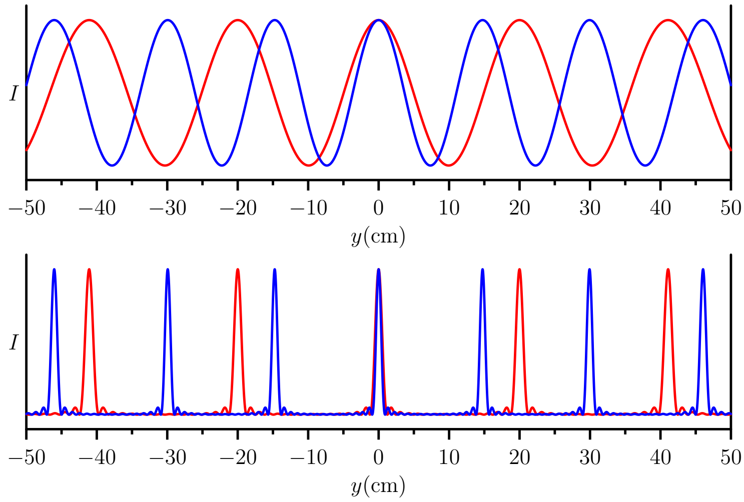
$$k = \frac{2mg(y_1 - y_2)}{x_2^2} = 580 \text{ N/m}.$$

c) Kun liike on loppunut, ystävä venyttää köyttä omalla painollaan

$$mg = kx \Leftrightarrow x = \frac{mg}{k} = 1{,}28 \text{ m}.$$

Korkeus on tällöin $(45 - 31 - 1{,}28)$ m $= 13$ m.

3. Valonsäde, joka sisältää kahta väriä, osuu ensin yhteen kapeaan rakoon ja sen jälkeen kaksoisrakoon, jossa raot ovat vierekkäin samalla etäisyydellä ensimmäisestä raosta. Kaksoisraon takana etäisyydellä 151 cm olevalle varjostimelle muodostuu interferenssikuvio, jonka värien intensiteetit käyttäytyvät kuten oikealla yläkuvassa, missä y on etäisyys keskimaksimista. Punaisen valon aallonpituus on 656,3 nm.



a) Mistä kokeesta on kysymys? [1p]
b) Kuinka kapeaa tarkoitetaan kapealla raolla tässä yhteydessä? [1p]
c) Mikä on rakojen välimatka? [3p]
d) Mikä on sinisen valon aallonpituus? [3p]
e) Miten oikealla alakuvassa olevan interferenssikuvion koejärjestely poikkeaa yläkuvan koejärjestelystä? [2p]

Ratkaisu:

a) Kyseessä on Youngin koe.

b) Karkeasti ottaen raon leveyden pitäisi olla tarkasteltavan valon aallonpituuden luokkaa.

c) Vierekkäisistä raoista lähtevät aaltorintamat ovat samassa vaiheessa eli tuottavat intensiteettimaksimin silloin, kun etäisyydet raoista varjostimelle kohtaan y poikkeavat toisistaan kokonaisluvun aallonpituuksia. Tämä voidaan kirjoittaa yhtälönä

$$d \sin \alpha = m\lambda \quad (m = 0, 1, 2, \ldots) \tag{5}$$

missä d on rakojen välimatka, α on valon taipumiskulma, m on maksimin kertaluku ja λ on valon aallonpituus. Punaisen valon ensimmäisen kertaluvun maksimin kohdalla $y = 20$ cm, josta saadaan $\tan \alpha = 20/151 \Rightarrow \alpha = 7{,}545°$. Yhtälön (5) mukaan

$$d = \frac{\lambda}{\sin \alpha} = \frac{656{,}3 \text{ nm}}{\sin 7{,}545°} = 4998 \text{ nm}.$$

Rakojen välimatka on 5,0 μm.

d) Sinisen valon ensimmäisen kertaluvun maksimin kohdalla $y = 15$ cm, josta saadaan $\alpha = 5{,}673°$. Yhtälön (5) mukaan

$$\lambda = d \sin \alpha = (4998 \text{ nm}) \cdot \sin 5{,}673° = 494 \text{ nm}.$$

Sinisen valon aallonpituus on 490 nm.

e) Kaksoisraon tilalla on useampia rakoja siten, että vierekkäisten rakojen välimatka on sama kuin kaksoisraossa.

4. Vesi alkaa kiehua avoimessa astiassa lämpötilassa, jossa kylläisen vesihöyryn paine saavuttaa ulkoisen ilmanpaineen. Vuoristokiipeilyssä on syytä varautua siihen, että ruoka valmistuu hitaammin, koska vesi kiehuu alle sadassa asteessa. Vieressä on taulukot kylläisen vesihöyryn paineelle muutamassa lämpötilassa ja ulkoiselle ilmanpaineelle muutamalla korkeudella.

t(°C)	p(mbar)
100	1013
95	845
90	701
85	578
80	473
75	383

h(km)	p(mbar)
0	1013
1	899
2	795
3	701
4	616
5	540

a) Laske kiehumislämpötilat taulukossa olevilla korkeuksilla. Voit käyttää esim. lineaarista interpolointia tai graafisia menetelmiä. [3p]

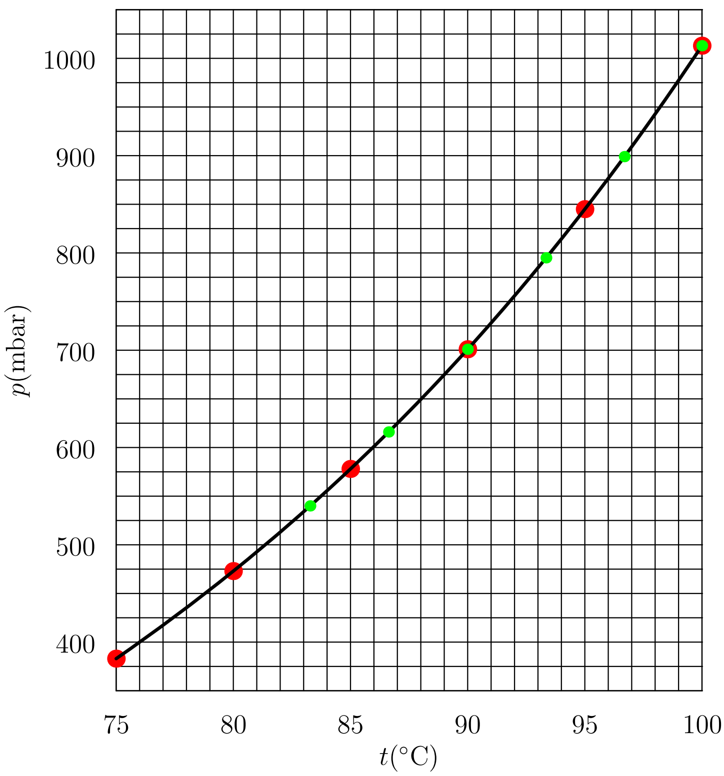
b) Esitä graafisesti kiehumislämpötila korkeuden funktiona välillä nollasta viiteen kilometriin. [4p]

c) Kiehumislämpötilaa voidaan approksimoida yhtälöllä $t = t_0 - kh$. Määritä yhtälössä esiintyvät vakiot t_0 ja k. [3p]

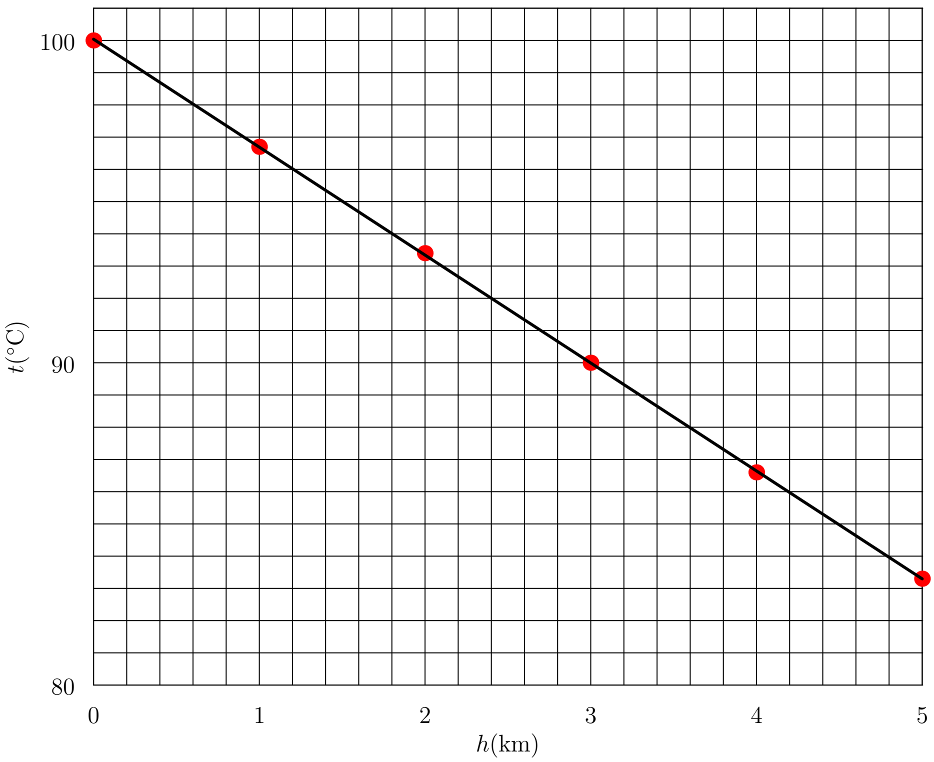
Ratkaisu:

a) t-p -taulukon pisteiden (punainen) kautta on piirretty tasainen käyrä (musta), johon on merkitty eri korkeuksilla olevia ilmanpaineita vastaavat pisteet (vihreä). Kiehumislämpötilat saadaan sinisten pisteiden ja kohdalta vaaka-akselilta (taulukko).

h(km)	t(°C)
0	100,0
1	96,7
2	93,4
3	90,0
4	86,6
5	83,3

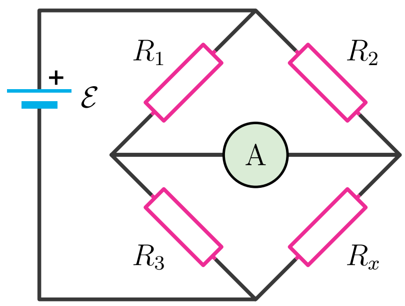


b)



c) h-t -taulukon pisteisiin silmämääräisesti tai laskimella sovitetun suoran kulmakerroin on $-3{,}3°\mathrm{C/km} \Rightarrow k = 3{,}3°\mathrm{C/km}$ ja kiehumislämpötila nolla-korkeudella $t_0 = 100°\mathrm{C}$.

5. Kuvan virtapiiri on Wheatstonen silta, jolla voidaan herkän virtamittarin A ja kolmen tunnetun vastuksen $R_1 \ldots R_3$ avulla määrittää tuntemattoman vastuksen R_x resistanssi. Silta on tasapainossa silloin, kun virtamittarissa ei kulje virtaa. Tunnettujen vastusten resistanssit ovat $R_1 = 111\ \Omega, R_2 = 222\ \Omega$ ja $R_3 = 333\ \Omega$. Virtamittarin resistanssi on mitätön ja lähdejännite $\mathcal{E} = 123$ V.



a) Millä resistanssin R_x arvolla silta on tasapainossa? [3p]

b) Mikä virta kulkee virtamittarissa, jos resistanssi R_x on ääretön? [3p]

c) Mikä virta kulkee virtamittarissa, jos resistanssi $R_x = 444\ \Omega$? [4p]

Ratkaisu:

a) Olkoon lähdejännitteen miinusnapa nolla-potentiaalissa. Tällöin virtamittarin vasen johdin on potentiaalissa $\mathcal{E}R_3/(R_1+R_3)$ ja oikea johdin potentiaalissa $\mathcal{E}R_x/(R_2+R_x)$. Kun silta on tasapainossa, vasen ja oikea johdin ovat samassa potentiaalissa:

$$\frac{\mathcal{E}R_3}{R_1+R_3} = \frac{\mathcal{E}R_x}{R_2+R_x} \Leftrightarrow \frac{1}{R_1/R_3+1} = \frac{1}{R_2/R_x+1}$$

Yhtälö toteutuu, jos

$$\frac{R_1}{R_3} = \frac{R_2}{R_x} \Leftrightarrow R_x = \frac{R_2R_3}{R_1} = 666\ \Omega.$$

b) Ääretön resistanssi tarkoittaa käytännössä vastuksen R_x puuttumista. Tällöin vastuksien R_1 ja R_2 rinnakytkentä on sarjassa vastuksen R_3 kanssa. Kytkennän resistanssi on

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)^{-1} + R_3 = 407{,}0\ \Omega.$$

Vastuksessa R_3 kulkee virta $I_3 = \mathcal{E}/407{,}0\ \Omega = 0{,}3022$ A, mikä aiheuttaa jännitehäviön $U_3 = R_3 I_3 = 100{,}6$ V. Vastuksen R_2 yli jää jännite $U_2 = \mathcal{E} - U_3 = 22{,}36$ V. Virtamittarin läpi kulkee vastuksen R_2 kautta kulkeva virta $U_2/R_2 = 0{,}101$ A.

c) Vastusten R_1 ja R_2 rinnankytkentä on sarjassa vastusten R_3 ja R_x rinnankytkennän kanssa. Kytkennän kokonaisresistanssi on

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_x}\right)^{-1} = 74{,}00\ \Omega + 190{,}3\ \Omega = 264{,}3\ \Omega.$$

Virtamittarin molemmat johtimet ovat samassa potentiaalissa $V_\mathrm{A} = 123\ V \cdot 190{,}3\ \Omega/264{,}3\ \Omega = 88{,}56$ V, josta saadaan $U_1 = 34{,}44$ V ja $U_3 = 88{,}56$ V. Nyt virtamittarin vasemmalla puolella olevaan solmukohtaan tulee vastusta R_1 pitkin virta $I_1 = U_1/R_1 = 0{,}3103$ A ja siitä poistuu vastusta R_3 pitkin virta $I_3 = U_3/R_3 = 0{,}2660$ A. Virtamittarin kautta poistuu virta $I_\mathrm{A} = I_1 - I_3 = 0{,}044$ A.

6. Vetyatomin energiatilat saadaan yhtälöstä

$$E_n = -\frac{13{,}6\ \mathrm{eV}}{n^2}$$

ja vedyn spektriviivojen aallonpituudet yhtälöstä

$$\frac{1}{\lambda} = R_\mathrm{H}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right),$$

missä R_H on Rydbergin vakio. Valon nopeus tyhjiössä on $2{,}998 \cdot 10^8$ m/s, alkeisvaraus on $1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C ja Planckin vakio on $6.626 \cdot 10^{-34}$ Js. Näkyvän valon aallonpituudet ovat välillä 400 - 700 nm.

a) Mikä on vedyn ionisaatioenergia jouleina? [2p]

b) Määritä Rydbergin vakio annettujen yhtälöiden ja vakioiden avulla. [3p]

c) Mitkä ovat vedyn spektriviivojen näkyvän valon aallonpituudet? [3p]

d) Voiko He-Ne-laserin punaisella valolla ($\lambda = 632{,}8$ nm) virittää jollain energiatilalla olevia vetyatomeja, miksi tai miksi ei? [2p]

Ratkaisu:

a) Ionisaatioenergia tarvitaan poistamaan elektroni perustilassa olevasta atomista. Perustilalla $n = 1$, ja perustilan energia on $-13{,}6$ eV. Ionisaatiossa $n \to \infty$ ja $E \to 0$. Ionisaatioon tarvitaan siis energia 13,6 eV.

b) Fotonien energiat ovat atomin energiatilojen energioiden erotuksia

$$hf = \frac{hc}{\lambda} = -\frac{13{,}6\ \mathrm{eV}}{m^2} - \left(-\frac{13{,}6\ \mathrm{eV}}{n^2}\right) = 13{,}6\ \mathrm{eV}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right).$$

Jakamalla tämä yhtälö puolittain aallonpituudet antavan yhtälön kanssa saadaan

$$R_\mathrm{H} = \frac{13{,}6\ \mathrm{eV}}{hc} = \frac{13{,}6\ \mathrm{eV} \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{J/eV}}{6{,}626 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{Js} \cdot 2{,}998 \cdot 10^8\ \mathrm{m/s}} = 1{,}097 \cdot 10^7\ 1/\mathrm{m}$$

c) Näkyvän valon aallonpituudet kuuluvat Balmerin sarjaan, joka muodostuu transitioista ylemmiltä tiloilta tilalle $n = 2$. Edellä lasketun Rydbergin vakion avulla saadaan transitioista tiloilta 3, 4, 5, 6 ja 7 aallonpituudet 656,3 nm, 486,2 nm, 434,1 nm, 410,2 nm ja 397,0 nm, joista neljä ensimmäistä on näkyvän valon alueella.

d) Edellisessä kohdassa laskettiin kaikki näkyvän valon aallonpituudet, jotka vastaavat vetyatomin kahden energiatilan energioiden erotusta. He-Ne-laserin punaisella valolla ei voi virittää vetyatomeja, koska sen aallonpituus ei vastaa mitään vetyatomin emittoimaa aallonpituutta.