Turun yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen valintakoe 12.5.2016.

Tässä valintakokeessa ei saa käyttää laskinta eikä taulukkokirjaa.

Tehtävä 1.
(a) Ratkaise $(x-4)^2 = (x-4)(x+4)$.
(b) Ratkaise epäyhtälö $\frac{3}{5}x - \frac{7}{10} < -\frac{2}{15}x$.
(c) Suora kulkee pisteiden $(1,7)$ ja $(2,4)$ kautta. Missä pisteessä se leikkaa x-akselin?

Pisteytys. (a) Kertomalla molemmat puolet auki saamme $x^2-8x+16 = x^2-16$ (2p), josta seuraa, että $-8x = -32$ eli $x = 4$ (2p).

(b) Siirtämällä x-termit samalle puolelle, saamme $\frac{11}{15}x < \frac{7}{10}$ (2p), josta $x < \frac{21}{22}$ (2p).

(c) Suoran yhtälö on $y - 7 = \frac{4-7}{2-1}(x-1)$ (2p). Leikkaupisteessä $y = 0$, joten leikkaupiste on $(\frac{10}{3}, 0)$ (2p).

Tehtävä 2. Tarkastellaan yhtälöä $t^4x^2 + (t^2+1)x + 1 = 0$ parametrin $t \neq 0$ eri arvoilla.
a) Ratkaise yhtälö, kun $t = 1$.
b) Määritä kaikki ne parametrin $t \neq 0$ arvot, joilla yhtälöllä on ainakin yksi ratkaisu $x \in \mathbb{R}$.

Pisteytys. (a) Kun $t = 1$, niin saamme yhtälön $x^2 + 2x + 1 = 0$ (2p), josta ratkaisukaavalla (2p) saamme $x = -1$ (2p).

(b) Koska $t \neq 0$, niin kyseessä on toisen asteen yhtälö, jolla on ainakin aksi ratkaisu kun sen dsiriminantti on ei-negatiivinen (2p). Laskemalla diskriminantin saamme $(3t^2+1)(1-t^2) \geq 0$ (2p). Ensimmäinen termin on aina ei-negatiivinen, joten epäyhtälö toteutuu kun $(1-t^2) \geq 0$ eli kun $t \in [-1, 0) \cup (0, 1]$ (2p).

Tehtävä 3. Laskimessa on toiminnot nPr ja nCr. (nPr on permutaatio ja nCr on binomikerroin.) Selitä mikä on näiden ero. Anna esimerkki tehtävästä, jossa tarvitaan nPr toimintoa, ja ratkaise tehtävä. Anna esimerkki tehtävästä, jossa tarvitaan nCr toimintoa, ja ratkaise tehtävä.

Pisteytys. Permutaaio nPr kertoo kuinka monella eri tavalla n alkiota voidaan järjestää järjestykseen (2p). Binomikerroin kertoo kuinka monta m alkiota sisältävää joukkoa voidaan valita n alkiota sisältävästä joukosta (2p). Esimerkiksi kuinka monella tavalla sinisestä, punaisesta ja keltaisesta kuutiosta voi rakentaa tornin, $3! = 6$ eri tavalla (2+2p). Esimerkiksi kuinka monella tavalla yhtiökokouksessa olevasta 5 eri henkilöstä voidaan valita 3 hengen hallitus, $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = 10$ eri tavalla (2+2p).

Tehtävä 4. Olkoot $a_1, a_2, \ldots, a_n$ reaalilukuja. Millä muuttujan x arvolla summa $(x-a_1)^2 + (x-a_2)^2 + \ldots + (x-a_n)^2$ on mahdollisimman pieni?

Pisteytys. Merkitään $f(x) = \sum_{k=1}^{n}(x - a_k)^2$. Tällöin f on ylöspäin aukeava parabeli (2p), jonka minimikohta löytyy derivaatan nollakohdasta (4p). Derivoimalla saamme $f'(x) = 2\sum_{k=1}^{n}(x - a_k)$ (2p), jolloin derivaatan nollakohta on $x = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$ (4p).

Tehtävä 5. Olkoon $P(x) = x^2 + x + 2$.
(a) Jaa $P(x)$ ensimmäisen asteen tekijöihin.
(b) Määritä sellaiset vakiot A ja B että $\dfrac{1}{P(x)} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x+2}$ kaikilla $x \geq 2$.
(c) Määritä funktion $\frac{1}{P(x)}$ integraalifunktio, kun $x \geq 2$.
(d) Laske epäoleellinen integraali $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{1}{P(x)}\,dx$.

Pisteytys. (a) Funktion p nollakohdat ovat -2 ja 1, joten $P(x) = (x+2)(x-1)$ (2 p).

(b) Kaikilla $x \geq 2$ pitää olla voimassa

$$\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} = \frac{(A+B)x + (2A-B)}{P(x)} = \frac{1}{P(x)},$$

joten saamme yhtälöryhmän

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ 2A - B = 1. \end{cases}$$

Ratkaisemalla saamme $A = \frac{1}{3}$ ja $B = -\frac{1}{3}$ (2p).

(c) Saamme

$$\int \frac{1}{P(x)}\,dx = \int \frac{\frac{1}{3}}{x-1}\,dx + \int \frac{-\frac{1}{3}}{x+2}\,dx = \frac{1}{3}\ln(x-1) - \frac{1}{3}\ln(x+1) + C,$$

kun $x \geq 2$ (4p).

(d) Jos $m > 2$, niin

$$\int_2^m \frac{1}{P(x)}\,dx = \Big/_{\!\!2}^{\,m} \left(\frac{1}{3}\ln(x-1) - \frac{1}{3}\ln(x+1)\right) = \frac{1}{3}\ln\left(4 \cdot \frac{k-1}{k+1}\right).$$

Tästä seuraa, että

$$\lim_{m\to\infty} \int_2^m \frac{1}{P(x)}\,dx = \frac{1}{3}\ln(4).$$

(d)-kohdasta (4p).