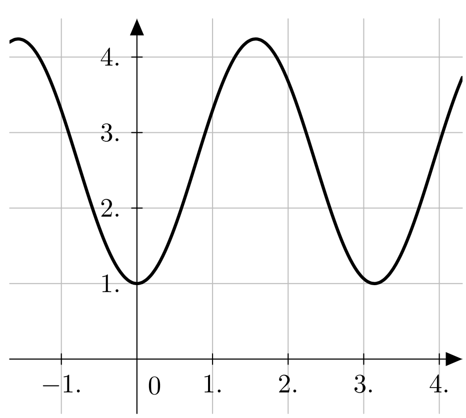
Matematiikan valintakoetehtävät

M1. (a) Anna esimerkki polynomista, jolla on täsmälleen yksi nollakohta.
(b) Anna esimerkki polynomista, jonka derivaatalla on täsmälleen kaksi nollakohtaa.
(c) Anna esimerkki polynomista, joka välillä $-1 \leq x \leq 2$ saavuttaa suurimman arvonsa välin molemmissa päätepisteissä ja joka ei ole vakiofunktio.
(d) Anna esimerkki polynomista, joka välillä $-2 \leq x \leq 3$ saavuttaa suurimman arvonsa pisteessä $x = 1$.
Perustele kaikki vastauksesi.

Pisteytys.
(a) Esimerkiksi $p(x) = x$. Esimerkki 1p, perustelut 1p
(b) Esimerkiksi $p(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2$, jolloin $p'(x) = x^2 - x = x(x-1)$. Esimerkki 1p, perustelut 1p
(c) Esimerkiksi $p(x) = (x+1)(x-2)$, joka on ylöspäin aukeava parabeli, jonka nollakohdat ovat -1 ja 2. Esimerkki 1p, perustelut 2p
(d) Olkoon esimerkiksi $p(x) = -(x+2)(x-4) = -x^2 + 2x + 8$. Tällöin $p'(x) = -2x + 2$, jonka ainoa nollakohta on 1. Koska p on alaspäin aukeava parabeli, sen suurin arvo on huipussa $x = 1$, joka kuuluu kysytylle välille. Esimerkki 1p, perustelut 2p.

M2. Oheisessa kuvassa on jatkuvan funktion f kuvaaja.
(a) Määritä raja-arvo $\lim\limits_{x \to 0} \left(f(1+2x) + x \sin\left(\frac{1}{f(x)}\right)\right)$.
(b) Arvioi lausekkeen $\int_{-1}^{1} 2f(x) + 1\, dx$ suuruutta.



Kuva 1. Terhtävän M2 funktio f.

Pisteytys.
(a) Raja-arvon laskusääntöjen nojalla

$$\lim_{x\to 0}\left(f(1+2x)+x\sin\left(\frac{1}{f(x)}\right)\right)=\lim_{x\to 0}f(1+2x)+\lim_{x\to 0}x\sin\left(\frac{1}{f(x)}\right)\quad [1p].$$

Kun $x \to 0$, niin $1+2x \to 1$. Kuvan perusteella $f(1) = 3{,}2$ [1p]. Saamme $\lim_{x\to 0} f(1+2x) = f(1) = 3{,}2$ [1p]. Koska sini on rajoitettu, niin $\lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{f(x)}\right) = 0$ [1p]. Näin ollen kysytty raja-arvo on 3,2 [1p].

(b) Integraalin laskusääntöjen nojalla

$$\int_{-1}^{1} 2f(x)+1\,dx = \int_{-1}^{1} 2f(x)\,dx + \int_{-1}^{1} 1\,dx = 2\int_{-1}^{1} f(x)\,dx + 2 \quad [2p].$$

Arvioidaan lukua $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$ kuvan perusteella. Määrätty integraali kertoo funktion f ja x-akselin rajaaman alueen pinta-alan välillä $[-1,1]$. [1p] Laskemalla ruutuja saamme sen arvoksi noin 4 [1p]. Vastaus on siis noin $2\cdot 4+2 = 10$ [1p].

M3. Ajatellaan 10 numeroa, joista kukin on kokonaisluku $4, 5, \ldots, 9$, tai 10.
(a) Anna esimerkki jakaumasta, jonka moodi on 7 ja 9.
(b) Anna esimerkki jakaumasta, jonka mediaani on 6,5.
(c) Anna esimerkki jakaumasta, jonka keskiarvo on 7,6.
Muista perustella vastauksesi.

Pisteytys.
(a) Esimerkiksi $7, 7, 7, 7, 7, 9, 9, 9, 9, 9$. Tässä moodi on 7 ja 9, koska molempia on eniten 5 kappaletta. Oikea jakauma 1p, perustelut 2p.
(b) Esimerkiksi $4, 5, 5, 5, 6, 7, 7, 7, 7, 7$. Tässä keskimmäiset ovat 6 ja 7 ja niiden keskiarvo on 6,5. Oikea jakauma 1p, perustelut 2p.
(c) Esimerkiksi $6, 6, 6, 6, 6, 6, 10, 10, 10, 10$. Tällöin

$$\frac{6+6+6+6+6+6+10+10+10+10}{10} = 7{,}6$$

Oikea jakauma 1p, perustelut 3p.

M4. (a) Osoita, että kolmen peräkkäisen positiivisen kokonaisluvun summa on aina jaollinen luvulla 3.
(b) Osoita, että kaikki alkuluvut paitsi luku 3 ovat muotoa $3n-1$ tai muotoa $3n+1$, missä n on positiivinen kokonaisluku.
(b) Osoita, että kaikki muotoa $3n-1$ ja kaikki muotoa $3n+1$, missä n on positiivinen kokonaisluku, olevat luvut eivät ole alkulukuja.

Pisteytys.
(a) Esitetään peräkkäiset luvut muodossa $n-1$, n ja $n+1$, missä n on positiivinen kokonaisluku. Tällöin $n-1+n+n+1 = 3n$ on jaollinen luvulla 3. [3p]

(b) Luvut $3n$, $n \in \mathbb{N}$, ovat kolmella jaolliset luvut. Niitä on aina kolmen välein. Siis perheestä $3n, 3n \pm 1$, $n \in \mathbb{N}$, saadaan kaikki positiiviset kokonaisluvut. Olkoon m alkuluku, joka on suurempi kuin 3. Tällöin m kuuluu johonkin 3-luvun joukkon $3n, 3n \pm 1$, se ei voi olla $3n$, koska silloin se olisi jaollinen luvulla 3. Siis $m = 3n - 1$ tai $m = 3n + 1$ jollakin $n \in \mathbb{N}$. [4p]

(c) Esimerkiksi jos $n = 1$, niin $3 \cdot 1 + 1 = 4$, joka ei ole alkuluku. Esimerkiksi jos $n = 3$, niin $3 \cdot 3 - 1 = 8$, joka ei ole alkuluku. [3p]