Turun yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen valintakoe 23.5.2017.

Tässä valintakokeessa ei saa käyttää laskinta eikä taulukkokirjaa.

Tehtävä 1.
(a) Anna kaksi esimerkkiä kaikilla reaaliluvuilla määritellystä funktiosta, jonka derivaattafunktio on $g(x) = x + 1$. Perustele vastauksesi.
(b) Anna esimerkki toisen asteen yhtälöstä, jolla ei ole yhtään ratkaisua. Perustele vastauksesi.
(c) Anna esimerkki positiivisesta funktiosta, jonka kuvaaja välillä $[1, 3]$ rajaa alueen, jonka pinta-ala on 7. Perustele vastauksesi.
(d) Anna esimerkki kaikilla reaaliluvuilla määritellystä funktiosta, jonka derivaattafunktio on kasvava. Perustele vastauksesi.

Pisteytys. (a) Annettu esimerkit, esim. $f_1(x) = \frac{1}{2}x^2+x+1$ ja $f_2(x) = \frac{1}{2}x^2+x+2$ [1 p]. Derivoimalla osoitettu etä esimerkit ovat toivotut [2 p].
(b) Annettu esimerkki, esim. $x^2 + 1 = 0$ [1 p] ja perustelu esimerkiksi ratkaisukaavalla [2 p].
(c) Annettu esimerkki, esim. $f(x) = \frac{7}{2}$ [1 p] ja perustelu integroimalla [2 p]

$$\int_1^3 \tfrac{7}{2}\,dx = \tfrac{7}{2} \Big/_{1}^{3} x = 7.$$

(d) Annettu esimerkki, esim. $f(x) = x^2$ [1 p] ja perustelu esimerkiksi derivoimalla kaksi kertaa [2 p]: $f'(x) = 2x$, $f''(x) = 2 > 0$.

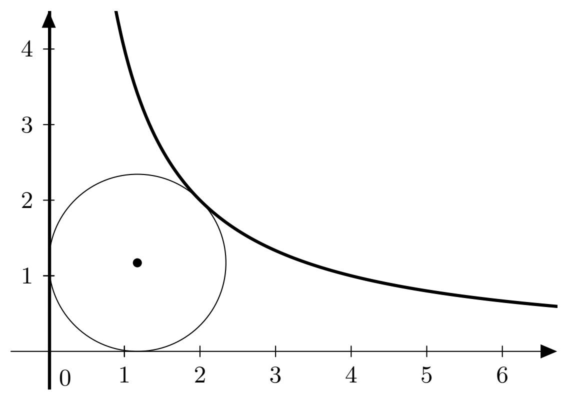
Tehtävä 2.
(a) Ratkaise epäyhtälö $x^2 + x > -2x$.
(b) Ratkaise epäyhtälö $|x - 2| \leq 5$.
(c) Ratkaise epäyhtälö $|\sqrt{x} - 4| \leq 1$.

Pisteytys. (a) Epäyhtälö saadaan muotoon $x^2 + 3x > 0$ [1p]. Funktion $f(x) = x^2 + 3x$ nollakohdat ovat -3 ja 0 [1 p]. Koska f on ylöspäin aukeava parabeli [1p], niin epätyhlö toteutuu kun $x < -3$ tai $x > 0$ [1p].
(b) $|x - 2|$ tarkoittaa niitä luvun x ja 2 välistä etäisyyttä [2p]. Tämän pitää olla pienempi kuin 5, joten vastaus on $[-3, 7]$ [2p].
(c) $|\sqrt{x} - 4|$ tarkoittaa niitä luvun $\sqrt{x}$ ja 4 välistä etäisyyttä, jonka voi olla korkeintaan 1 [1p]. Saamme $\sqrt{x} \in [3, 5]$ [1p], eli $x \in [9, 25]$ [2p].

Tehtävä 3.
(a) Määrittele todennäköisyyslaskennan termi *ehdollinen todennäköisyys.*
(b) Anna esimerkki tehtävästä, jossa tarvitaan ehdollista todennäköisyyttä. Ratkaise tehtävä.
(b) Anna esimerkki tehtävästä, jossa ei tarvita ehdollista todennäköisyyttä. Ratkaise tehtävä.

Pisteytys. (a) Termi määritelty oikein [4 p].
(b) Annettu tehtävä [1 p] ja ratkaistu se [3 p]. Esim.Koripalloilijan ensimmäisen heiton onnistumistodennäköisyys on 60% ja toisen heiton onnistumistodennäköisyys on 70%, jos ensimmäinen heitto meno koriin. Millä todennäköisyydellä koripalloilija onnistuu molemmissa heitoissa? Vastaus: Merk. A tarkoittaa 1. heiton onnistumista ja B toisen heiton onnistumista. Nyt $P(A \text{ ja } B) = P(A)P(B/A) = 0{,}6 * 0{,}7$.
(c) Annettu tehtävä [1 p] ja ratkaistu se [3 p]. Esim. Millä todennäköisyydellä korttipakasta nostettava kortti on ruutu 7? Vastaus: $\frac{1}{52}$.

Tehtävä 4. Ympyrä sijaitsee koordinaatiston ensimmäisessä neljänneksessä ja sivuaa x-akselia, y-akselia ja käyrää $y = \frac{4}{x}$. Laske pallon keskipiste.



Pisteytys. Tilanne on symmetrinen suoran $y = x$ suhteen [2 p]. Suoran $y = x$ ja käyrän $y = \frac{4}{x}$ leikkauspiste on $(2, 2)$ [2 p]. Olkoon (x, y) pallon keskipiste. Saamme yhtälön $(x-2)^2 + (y-2)^2 = y^2$ [2 p], johon sijoittamalla $y = x$ saamme $x^2 - 8x + 8 = 0$. Tämän ratkaisut ovat $x = 4 \pm 2\sqrt{2}$ [2 p]. Näistä $x = 4 + 2\sqrt{2} > 6$ ei kelpaa koska tällöin piste (x, x) on käyrän yläpuolella [2 p]. Näin olen keskipiste on $(4 - 2\sqrt{2}, 4 - 2\sqrt{2})$ [2 p].

Tehtävä 5. Funktion $g(x)$ arvoilla on voimassa $-20 \leq g(x) \leq 17$. Osoita, että funktio $h(x) = x^2 g(x)$ on derivoituva kohdassa $x = 0$.

Pisteytys. Koska $h(0) = 0$ [2p], niin erotusosamäärä on

$$\frac{h(x) - h(0)}{x} = \frac{x^2 g(x)}{x} = xg(x). \quad [4p]$$

Tällöin

$$-20|x| \leq xg(x) \leq 20|x|, \quad [2p]$$

josta seuraa että $\lim_{x \to 0} xg(x) = 0$ [2p]. Tällöin $f'(0) = 0$ [2 p].