Helsingin, Jyväskylän, Oulun, Tampereen ja Turun yliopisto

Matematiikan valintakoe 9.6.2014 klo 10–13

---

1. Ratkaise seuraavat yhtälöt ja epäyhtälöt:

a) $\dfrac{-x+2}{3\,x^2+1} > 0$ c) $\dfrac{x}{2} - \dfrac{2\,x+1}{3} = \dfrac{1-x}{4}$

b) $e^{2\,x} + 2\,e^x - 3 = 0$ d) $\cos(2\,x) = \sqrt{3}\,/2$

Ratkaisu: a) Huomataan, että $3x^2+1 > 0$ kaikille reaaliluvuille x **(1p)**. Näin ollen

$$\frac{-x+2}{3x^2+1} > 0$$

täsmälleen silloin kun $-x+2 > 0$, josta saadaan ehto $x < 2$ **(2p)**.

b) Merkitään $y = e^x$ jolloin yhtälö $e^{2x} + 2e^x - 3 = 0$ saa muodon

$$y^2 + 2y - 3 = 0.$$

Toisen asteen yhtälön ratkaisukaavan perusteella

$$y = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} = -1 \pm 2, \qquad \textbf{(1p)}$$

joten $y = -3$ tai $y = 1$. Muistetaan, että $y = e^x$ eli erityisesti $y > 0$ ja siten voimme hylätä tapauksen $y = -3$ **(1p)**. Näin ollen yhtälön ratkaisu on x jolle $e^x = 1$ eli $x = 0$ **(1p)**.

c) Laventamalla termit saman nimisiksi saamme yhtälön

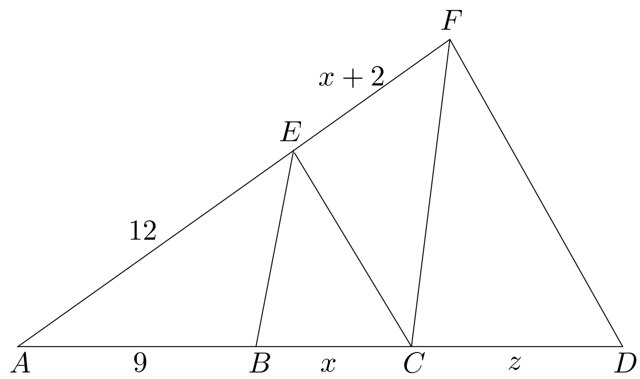
$$\frac{12x - 16x - 8}{24} = \frac{6-6x}{24}. \qquad \textbf{(1p)}$$

Tämä yhtälö on voimassa täsmälleen silloin kun osoittajat ovat yhtäsuuret, eli kun

$$\begin{aligned} -4x - 8 &= 6 - 6x \\ \Leftrightarrow 2x &= 8 + 6 = 14 \\ \Leftrightarrow x &= 7. \qquad \textbf{(2p)} \end{aligned}$$

d) Tarkastelemalla tasasivuista kolmiota, jonka sivun pituus on 2 huomaamme, että yhtälön $\cos(2x) = \sqrt{3}/2$ eräs ratkaisu on $2x = \pi/6$, toisin sanoen $x = \pi/12$ **(1p)**. Koska funktio $x \mapsto \cos(2x)$ on jaksollinen ja jakson pituus on π niin myös reaaliluvut $x = \pi/12 + k\pi$ ovat ratkaisuja kaikille $k \in \mathbb{Z}$. **(1p)** Lisäksi muistetaan, että $\cos(-x) = \cos(x)$ joten myös luvut $x = -\pi/12 + l\pi$ ovat ratkaisuja kaikille $l \in \mathbb{Z}$. **(1p)**

2. Oheisessa kuvassa suorat CE ja DF ovat yhdensuuntaiset sekä suorat BE ja CF ovat yhdensuuntaiset. Lisäksi tiedetään, että janan AB pituus on 9 ja janan AE pituus on 12. Määritä janojen BC ja CD pituudet x ja z, kun janan EF pituus on $x + 2$.



Määritä x ja z.

Ratkaisu: Kuvassa on neljä eri kolmiota: $\triangle ABE, \triangle ACE, \triangle ACF$ ja $\triangle ADF$. Tutkitaan aluksi kolmioita $\triangle ABE$ ja $\triangle ACF$.

Tiedetään, että suorat BE ja CF ovat yhdensuuntaiset eli $BE \| CF$. Tällöin kolmiot $\triangle ABE$ ja $\triangle ACF$ ovat yhdenmuotoiset eli $\triangle ABE \sim \triangle ACF$. **(1p)**

[Syy: Kulmat $\measuredangle ABE$ ja $\measuredangle ACF$ ovat samankohtaisia kulmia, jolloin ne ovat yhtä suuret eli $\measuredangle ABE = \measuredangle ACF$. (Tai vastaavasta syystä pätee $\measuredangle AEB = \measuredangle AFC$.) Kulma $\measuredangle EAB = \measuredangle FAC$ on kolmioille $\triangle ABE$ ja $\triangle ACF$ yhteinen. Siispä *kk*–sääntö (”kulma–kulma -sääntö”) pätee.]

Tällöin vastinsivujen pituuksien suhde on vakio eli

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AF}}. \qquad \textbf{(2p)}$$

Nyt
(1)
$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} = 9 + x \quad \text{ja} \quad \overline{AF} = \overline{AE} + \overline{EF} = 12 + x + 2 = 14 + x. \qquad \textbf{(1p)}$$

Saadaan siis

$$\begin{aligned} \frac{9}{9+x} &= \frac{12}{14+x} \\ \Leftrightarrow \quad 9(14+x) &= 12(9+x) \\ \Leftrightarrow \quad 126 + 9x &= 108 + 12x \\ \Leftrightarrow \quad 3x &= 18 \\ \Leftrightarrow \quad x &= 6. \qquad \textbf{(2p)} \end{aligned}$$

Vastaavasti nähdään, kun suorat CE ja DF ovat yhdensuuntaiset eli $CE \| DF$, että kolmiot $\triangle ACE$ ja $\triangle ADF$ ovat yhdenmuotoiset eli $\triangle ACE \sim \triangle ADF$. **(1p)**

[Syy: kulmat $\measuredangle ACE$ ja $\measuredangle ADF$ ovat samankohtaisia, joten $\measuredangle ACE = \measuredangle ADF$. (Tai vastaavasta syystä pätee $\measuredangle AEC = \measuredangle AFD$.) Edelleen kulma $\measuredangle EAC = \measuredangle FAD$ on kolmioille $\triangle ACE$ ja $\triangle ADF$ yhteinen. Siispä kk-sääntö pätee.]

Tällöin vastinsivujen pituuksien suhde on vakio eli

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AF}}. \qquad \textbf{(2p)}$$

Koska yhtälöiden (1) lisäksi pätee

$$\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} = 9 + x + z,$$

ja $x = 6$, **(1p)** niin saadaan

$$\begin{aligned}
\frac{9+x}{9+x+z} &= \frac{12}{14+x}\\
\frac{9+6}{9+6+z} &= \frac{12}{14+6}\\
\frac{15}{15+z} &= \frac{12}{20} = \frac{3}{5}\\
\Leftrightarrow \quad 5 \cdot 15 &= 3(15+z)\\
\Leftrightarrow \quad 75 &= 45 + 3z\\
\Leftrightarrow \quad 3z &= 30\\
\Leftrightarrow \quad z &= 10. \qquad \textbf{(2p)}
\end{aligned}$$

Näin ollen janan BC pituus on 6 ja janan CD pituus on 10.

Pisteytys. 6p/kolmio: 1p yhdenmuotoisuuden toteamisesta; 2p verrannosta/maininnasta vastinsivujen pituuksien suhteen säilymisestä (Oikean verrannon kirjoittaminen osoittanee, että kokelas on ymmärtänyt, mistä on kysymys. Varsinaisia perusteluja yhdenmuotoisuudelle ei vaadita.); 3p sijoittamisesta ja itse laskuista. $\boxed{2.}$

3. Paraabeli on tasokäyrä, joka muodostuu niistä pisteistä, joilla etäisyys kiinteästä pisteestä (*paraabelin polttopiste*) on sama kuin kohtisuora etäisyys kiinteään suoraan (*paraabelin johtosuora*). Määritä paraabelin yhtälö, kun sen polttopiste on $(1, -1)$ ja johtosuora on suora $y = 1$.

Ratkaisu: Pisteen (x, y) etäisyys polttopisteestä $(1, -1)$ on

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2} \qquad \textbf{(2p)}$$

ja etäisyys paraabelin johtosuoraan on $|y - 1|$. (**2p**) Etsitty paraabeli muodostuu siten tason pisteistä (x, y), jotka toteuttavat yhtälön

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2} = |y-1|\,. \qquad \textbf{(2p)}$$

Koska molemmat puolet ovat ei-negatiivisia (**1p**), toteutuu yhtälö jos ja vain jos

$$\begin{aligned} &(x-1)^2 + (y+1)^2 = (y-1)^2 \\ \iff &x^2 - 2x + 1 = -4y \\ \iff &y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}. \quad (\mathbf{5p}) \end{aligned}$$

Etsityn paraabelin yhtälö on siis $y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$. $\boxed{3.}$

4. Koripallon NBA-liigan finaalisarjassa pelaavat Miami Heat ja San Antonio Spurs. Joukkueet ovat niin tasavahvoja, että molemmilla on yhtä suuri todennäköisyys voittaa mikä tahansa finaalisarjan otteluista. Ottelusarjan voittamiseen tarvitaan 4 voittoa. Mikä on todennäköisyys sille, että ottelusarja venyy 7 peliin?

Ratkaisu: Ottelusarja venyy 7 peliin jos ja vain jos 6 ensimmäisen ottelun jälkeen voitot ovat tasan 3–3. (**3p**) Todennäköisyys p sille, että kumpikin joukkue voittaa 6 ensimmäisestä pelistä täsmälleen 3 saadaan binomijakaumasta: (**2p**)

$$p = \binom{6}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^{6-3} = \frac{6!}{3!\,3!}\frac{1}{2^6} = 20 \cdot \frac{1}{64} = \frac{5}{16}. \qquad (\mathbf{7p})$$

Tähän laskuun liittyvistä seitsemästä pisteestä **neljä** saa, kun binomitodennäköisyyden lauseke on oikein, ja loput **kolme**, kun lauseke on sievennettu oikein (ja vastaus on oikea).

Tehtävän voi ratkaista myös tutkimalla kaikkia mahdollisia ottelutulosjonoja, ja etsimällä niistä ne, jotka johtavat 7 peliin. (Mieleen tulevat tukkimiehen kirjanpito ja binäärinen puu.) Tällaisista ratkaisuista pitäisi olla löydettävissä kaksi osaa: perusjoukon (eli kaikkien 64 ottelun tulosten (voitto/tappio) lista) määrääminen ja suosiollisten tapausten selvittäminen (siis ne tapaukset, joissa tulos on kolme voittoa ja kolme tappiota). Kumpikin ratkaisun osa (perusjoukko ja suosiolliset tapaukset) on **kuuden pisteen arvoinen**. Kummassakin osassa **kaksi pistettä** saa oikeasta vastauksesta ja **neljä pistettä** perusteluista. $\boxed{4.}$

5. Etsi alaspäin aukeavista paraabeleista, jotka kulkevat pisteiden $(0,0)$ ja $(1,1)$ kautta, sellainen, että paraabelin ja x-akselin rajoittaman alueen pinta-ala on mahdollisimman pieni.

Ratkaisu: Jotta paraabeli $y = ax^2 + bx + c$ kulkisi pisteiden $(0,0)$ ja $(1,1)$ kautta, tulee olla

$$0 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c$$

ja

$$1 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c.$$

Ensimmäisestä yhtälöstä saadaan $c = 0$ (**1p**) ja toisesta $a + b = 1$. (**1p**) Käsiteltävät paraabelit ovat siis muotoa $y = ax^2 + (1-a)x$, missä $a < 0$. (**1p**)

Tällaisen paraabelin nollakohdat ovat $x = 0$ ja $x = 1 - \frac{1}{a}$ (**1p**), joten paraabelin ja x-akselin rajoittaman alueen pinta-ala on

$$f(a) = \int_0^{1-\frac{1}{a}} ax^2 + (1-a)x\,dx = \Big/_{0}^{1-\frac{1}{a}} \frac{a}{3}x^3 + \frac{1-a}{2}x^2 = \frac{(1-a)^3}{6a^2}. \qquad (\mathbf{3p})$$

Tämän lausekkeen derivaatta on $f'(a) = -\frac{a^3-3a+2}{6a^3}$. (**1p**) Nimittäjä $6a^3$ on aina negatiivinen, joten derivaatan merkki määräytyy osoittajan merkin mukaan. Selvästi $a = 1$ on yhtälön $a^3 - 3a + 2 = 0$ eräs ratkaisu (**1p**), ja jakolaskun avulla saadaan edelleen tekijöihin jako

$$a^3 - 3a^2 + 2 = (a-1)(a^2 + a - 2) = (a-1)^2(a+2). \qquad (\mathbf{1p})$$

Tämän perusteella f on aidosti vähenevä välillä $]-\infty, -2]$ ja aidosti kasvava välillä $[-2, 0[$ (**1p**), ja siksi se saavuttaa pienimmän arvonsa välillä $]-\infty, 0[$ pisteessä $a = -2$. Tutkittavista paraabeleista pienimmän alan rajoittaa siis $y = 3x - 2x^2$. (**1p**) $\boxed{5.}$