

Turun yliopisto
Matematiikan valintakoetehtävät
3.6.2020

Ratkaise seuraavat kolme tehtävää. Voit käyttää apuna kynää ja paperia. Ratkaisemisen apuna et saa käyttää laskinta, taulukkokirjaa, puhelinta tai tietokonetta. Kun olet valmis esitä ratkaisusi arvioijille. Sinulla on aikaa 75 minuuttia, ja voit itse päättää miten jaat ajan tehtävien ratkaisemisen ja esittämisen välille. Lisäksi voit itse päättää missä järjestyksessä esität ratkaisusi, ja sen esitätkö ratkaisusi yksi kerrallaan vai kaikki kerralla. Pidä zoom-yhteys koko ajan auki, sekä kamera ja mikrofoni päällä.

Tehtävä M1. Mitja on ratkaissut polynomin $p(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 1$ suurimman ja pienimmän arvon välillä $[-1, 2]$. Etsi Mitjan ratkaisusta virheet ja korjaa ne.

Mitjan ratkaisu: Ensin derivoin funktion p ja saan $p'(x) = x^3 - 4x^2 + 3x$. Sitten lasken derivaatan nollakohdat

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = \begin{cases} 1 \\ 3 \end{cases} .$$

Lopuksi sijoitan derivaatan nollakohdat ja välin päätepisteet:

$$p(-1) = \frac{1}{4} - 1^4 - \frac{4}{3} - 1^3 + \frac{3}{2} - 1^2 + 1 = -\frac{19}{12}$$

$$p(1) = \frac{1}{4}1^4 - \frac{4}{3}1^3 + \frac{3}{2}1^2 + 1 = \frac{17}{12}$$

$$p(2) = 2^3 - 4 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 = -2$$

$$p(3) = \frac{1}{4}3^4 - \frac{4}{3}3^3 + \frac{3}{2}3^2 + 1 = -\frac{5}{4}.$$

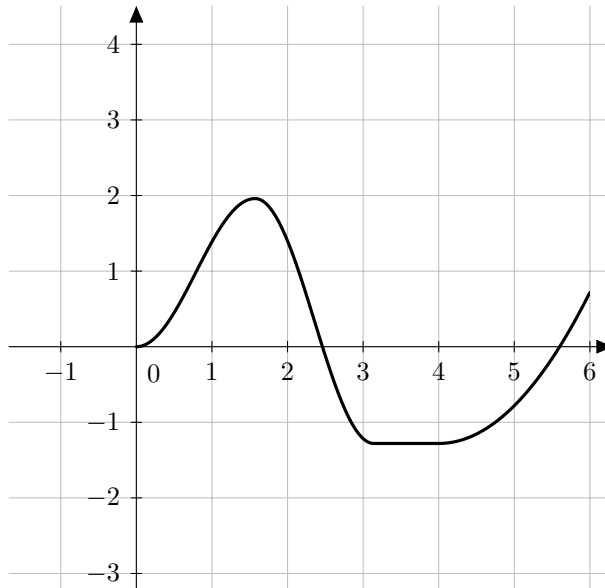
Näin suurin arvo on 1 ja pienin -1 .

Pisteytys.

- derivaatan nollakohta 0 puuttuu. 1p.
- $p(0)$ puuttuu. 1p.
- $p(0) = 1$. 1p.
- -1 sijoitettu väärin polynomin lausekkeeseen. 1p.
- pitää olla $p(-1) = \frac{49}{12}$. 1p.
- $x = 2$ on sijoitettu derivaatan lausekkeeseen/väärään funktioon. 1p.
- $p(2) = \frac{1}{3}$. 1p.
- $x = 3$ ei kuulu välille $[-1, 2]$, joten termi $p(3)$ on tarpeeton. 1p.
- vastauksena annettu piste, ei arvo. 1p.
- suurin arvo on $\frac{49}{12}$ ja pienin arvo on $\frac{1}{3}$. 1p.

Tehtävä M2. Kuvassa 1 on funktion f derivaatan f' kuvaaja. Lisäksi tiedetään että $f(0) = -1$. Perustele vastauksesi joka kohdassa.

- Millä välillä/väleillä funktio f on kasvava? (2p)
- Millä välillä/väleillä funktion f kuvaaja on suora? (2p)
- Onko funktiolla f välillä $1 < x < 5$ lokaalia ääriarvokohtaa? Jos lokaali ääriarvokohta löytyy, niin perustele onko se lokaali maksimi vai lokaali minimi kohta. (2p)
- Arvioi luvun $f(4)$ suuruutta. (4p)



KUVA 1. Tehtävän M2 funktio f' .

Pisteytys. Avoin väli ok.

- Vastaus ($[0, 2.5]$ ja $[5.5, 6]$) 1p, perustelu ($f' \geq 0$) 1p. (2.3–2.7 ja 5.4–5.6 ok)
- Vastaus ($[3.1, 4]$) 1p, perustelu (f' on vakio) 1p. (3.05–3.3 ja 4–4.1 ok)
- Pisteessä 2.5 on lokaali maksimi (1p), koska sitä ennen funktio on kasvava ja sen jälkeen vähenevä (1p).
- Yhteensä 4p.
 - Arvioidaan derivaattafunktion rajoittamaa pinta-alaa välillä $[0, 4]$ 1p.
 - Ruutuja laskemalla (tms) välillä $[0, 2.5]$ saadaan arvio, joka on välillä $[2.5, 2.9]$ 1p.
 - Ruutuja laskemalla (tms) välillä $[2.5, 4]$ saadaan arvio, joka on välillä $[-2.9, -2.2]$ 1p.
 - vastaus jossa huomioitu $f(0) = -1$. 1p.

Tehtävä M3. Tämä tehtävä liittyy todennäköisyytlaskentaan.

- Milloin tapahtumat A ja B ovat riippumattomia? (2p)

(b) Anna esimerkki riippumattomista tapahtumista A ja B . Perustele esimerkkisi. (3p)

(c) Anna esimerkki tapahtumista B ja C , jotka eivät ole riippumattomia. Perustele esimerkkisi. (3p)

(d) Mitja kulkee työmatkan polkupyörällä. Hänen työmatkallaan on kolmet liikennevalot. Miten tapahtuma ”Mitja ei joudu pysähtymään yksissäkään liikennevaloissa” voidaan esittää yksittäisiä liikennevaloja koskevien tapahtumien avulla? Ovatko ne riippumattomia vai ei-riippumattomia tapahtumia? (2p)

Pisteytys.

(a) ”Tapahtuman A t:n on sama tapahtuipa B tai ei” tai $P(A) = P(A|B)$ tai $P(A \text{ ja } B) = P(A)P(B)$ 2p. Vain ”ei riipu toisista” 1p.

(b) Oikea esimerkki 1p, perustelu 2p.

(c) Oikea esimerkki 1p, perustelu 2p.

(d) Yhteensä 2 pistettä:

Tarvitaan kolme tapahtumaa: tapahtuma L_i liikennevalo i on vihreä, $i = 1, 2, 3$, jolloin kysytty tapahtuma on ” L_1 ja L_2 ja L_3 ”. 1p.

Jos liikennevalot toimivat toisistaan riippumattomasti, niin tapahtumat ovat riippumattomia (1p)

TAI jos liikennevalot kommunikoivat keskenään, niin tapahtumat eivät ole riippumattomia keskenään (1p).